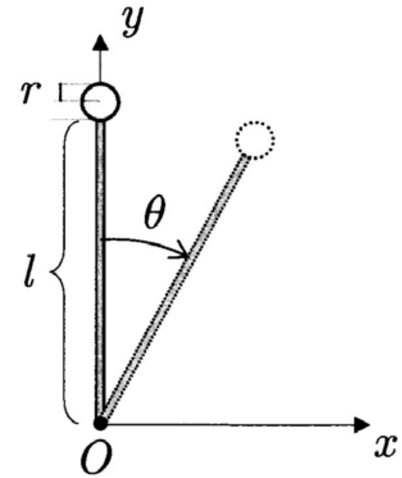
Un'asta omogenea ha lunghezza l, spessore trascurabile e massa m_a.
Ad una sua estremità è fissato un disco omogeneo di raggio r e massa m_d, mentre l'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della figura e passante per il punto O, asse attorno al quale l'asta può ruotare con attrito trascurabile nel piano verticale.
L'asta, che si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio instabile, ad un dato istante comincia a cadere in seguito a una lieve perturbazione.



Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

a) il momento d'inerzia totale I_O del sistema rispetto all'asse orizzontale passante per O.

b) la coordinata y_G del centro di massa del sistema nella condizione iniziale di equilibrio instabile.

c) la massima velocità angolare ω_{max} assunta dal sistema in funzione di m_a , m_d, I_O , y_G e del modulo dell'accelerazione di gravità g.

il momento d'inerzia rispetto al centro di massa di una asta omogenea di massa m_a

e lunghezza l e' $I_{CM_a} = \dfrac{1}{12} m_a l^2$ mentre il momento d'inerzia rispetto al punto O

risulta essere $I_O = \dfrac{1}{3} m_a l^2$ in effetti secondo il teorema di Huygens Steiner

il momento d'inerzia di un corpo esteso di massa totale m_a calcolato rispetto

ad un asse che si trova a distanza d da un asse passante per il centro di massa e’ dato da $I = I_C + m_a d^2$ percio’ se $I_{CM_a} = \frac{1}{12} m_a l^2$ $\Rightarrow$ $I_{O_a} = \frac{1}{12} m_a l^2 + m_a \frac{l^2}{4}$

quindi $I_O = \frac{1}{3} m_a l^2$

il momento d’inerzia rispetto al centro di massa di un disco omogeneo di massa m_d

e’ pari a $I_{CM_d} = \frac{1}{2} m_d r^2$ dunque il momento d’inerzia del disco omogeneo

rispetto al punto O sara’ dato da $I_{O_d} = I_{CM_d} + m_d \left(l + r\right)^2 = \frac{1}{2} m_d r^2 + m_d \left(l + r\right)^2$

in conclusione il momento d’inerzia totale sara’

$$I_{O_T} = \frac{1}{3} m_a l^2 + \frac{1}{2} m_d r^2 + m_d \left(l + r\right)^2$$

per quanto riguarda la seconda domanda dato che la massa m_a e’ distribuita in modo omogeneo

lungo l’asta e che la massa m_d e’ distribuita in modo omogeneo sul disco la coordinata y_G del

centro di massa del sistema nella condizione iniziale di equilibrio instabile si otterra’ considerando che la massa dell’asta puo’ essere pensata come concentrata nel suo centro di

massa posto a distanza l/2 dal punto O mentre quella del disco puo’ essere pensata come

concentrata nel centro del disco posto a distanza (l + r) da O

$$y_G = \frac{m_a \ l/2 \ + m_d \left(l \ + \ r \right)}{(m_a + m_d)}$$

infine ω_{max} si avrà nella posizione di energia potenziale minima $(\theta = \pi);$

applicando la conservazione dell’energia meccanica e la relazione tra energia potenziale della forza peso e quota del centro di massa si ha

energia potenziale iniziale = $(m_a + \ m_d) \ g \ y_G$ energia cinetica iniziale = 0

energia potenziale finale = $-(m_a + \ m_d) \ g \ y_G$ energia cinetica finale = $\frac{1}{2} I_{O_T} \omega_{\max}^2$

energia m. iniziale = $(m_a + \ m_d) \ g \ y_G$ energia m. finale = $\frac{1}{2} I_{O_T} \omega_{\max}^2 - (m_a + \ m_d) \ g \ y_G$

data l’assenza di attriti possiamo imporre la conservazione dell’energia meccanica

$$(m_a + m_d)\ g\ y_G = (1/2) I_{0_t}\ (\omega_{max})^2 - (m_a + m_d) g\ y_G$$ da cui

$$\omega_{max} = [\ 4(m_a + m_d) g\ y_G / I_{0_t}\ ]^{1/2}$$

Backup slides