Un asta di massa m e lunghezza l

e' disposta lungo la verticale ed

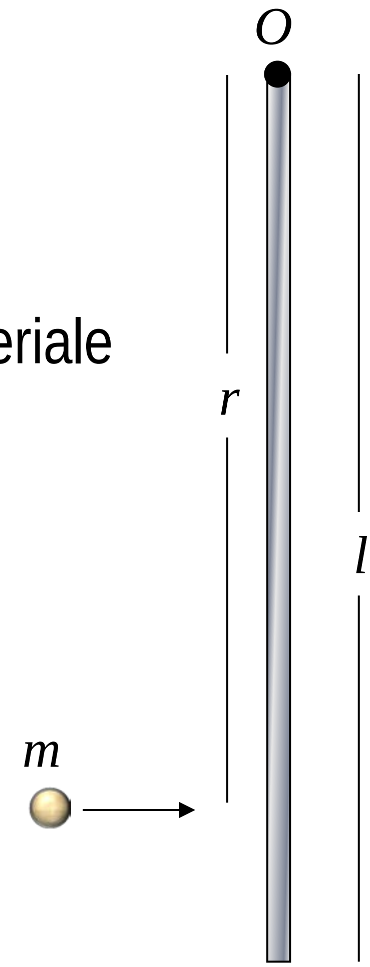
e' vincolata ad un estremo O, un punto materiale

di massa m e componente della velocita'

perpendicolare alla sbarretta pari a v

colpisce l'asta a distanza r

dall'estremo fisso e vi rimane attaccato.



Determinare :

1) la velocita' angolare del sistema dopo l'urto

2) la velocita' che il punto materiale dovra' avere affinche' l'asta ruoti di 180°

durante l’urto agisce una forza esterna di tipo impulsivo

dovuta al vincolo in O di conseguenza il sistema

non e’ isolato e non sara’ possibile che sia conservata

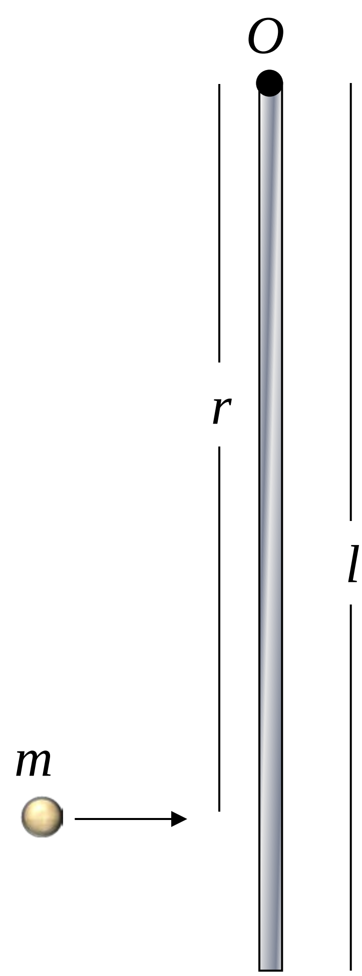
la quantita’ di moto totale del sistema

l’urto e’ perfettamente anelastico

percio’ non si potra’ neanche

imporre la conservazione

dell’ energia cinetica



il punto in cui e’ incernierata l’asta rimane fermo durante

l’urto percio’ lo si puo’ assumere come polo fisso

inoltre rispetto al punto in cui e’ incernierata l’asta

il momento angolare delle forze vincolari e’ nullo in quanto

e’ nullo il braccio della forza di reazione vincolare

quindi prendendo il punto fisso O come polo sara’ possibile

imporre la conservazione del momento angolare totale

rispetto a questo polo

dunque assumeremo un sistema di coordinate cartesiane

centrato nel polo O e con asse x diretto verso il basso considerando i moduli per il momento angolare rispetto ad O

immediatamente prima dell'urto $L_{T_{iniz}} = mr\mathrm{v}$

immediatamente dopo l'urto $L_{T_{fin}} = I\omega$

uguagliando $m\mathrm{v}r = I\omega$ ⇨ $\omega = \dfrac{m\mathrm{v}r}{I}$

il momento d'inerzia del sistema rispetto ad O risulta essere

$I = m\dfrac{l^2}{3} + mr^2$ percio' $\omega = \dfrac{\mathrm{v}r}{\dfrac{l^2}{3} + r^2}$

poiche' abbiamo assunto sistema di coordinate centrato in O

e con asse x diretto verso il basso la posizione

del centro di massa del sistema, nel momento dell'urto e'

$$x_{cm} = \frac{m\frac{l}{2} + mr}{2m} = \frac{1}{2}(r + \frac{l}{2})$$

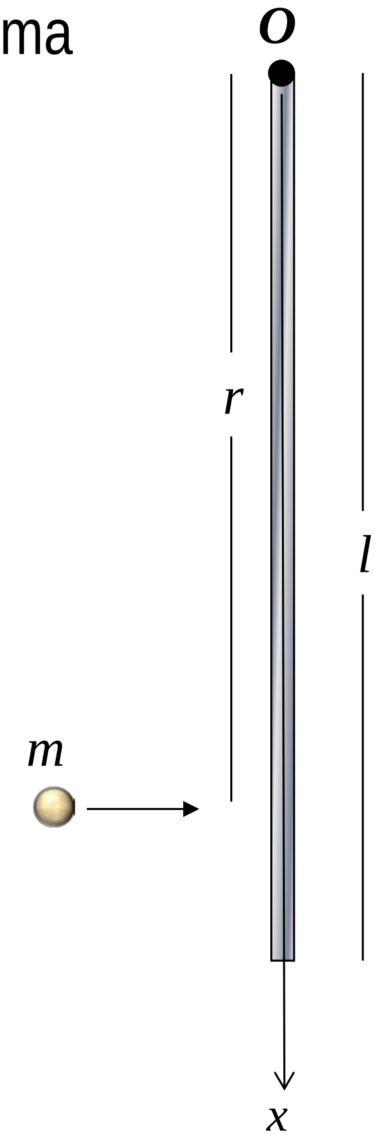
dopo l'urto, perfettamente anelastico, il sistema

iniziera' ad oscillare come un pendolo

e se si possono trascurare gli attriti

si potra' imporre la conservazione della

energia meccanica



$$E_C + E_P = E_m = cost$$

assumeremo che l'energia potenziale nella posizione

iniziale sia pari a $2mgx_{CM}$ rispetto ad O

($2m$ perche' tutta la massa e'concentrata nel $C.M.$)

immediatamente dopo l'urto anelastico l'energia meccanica e'

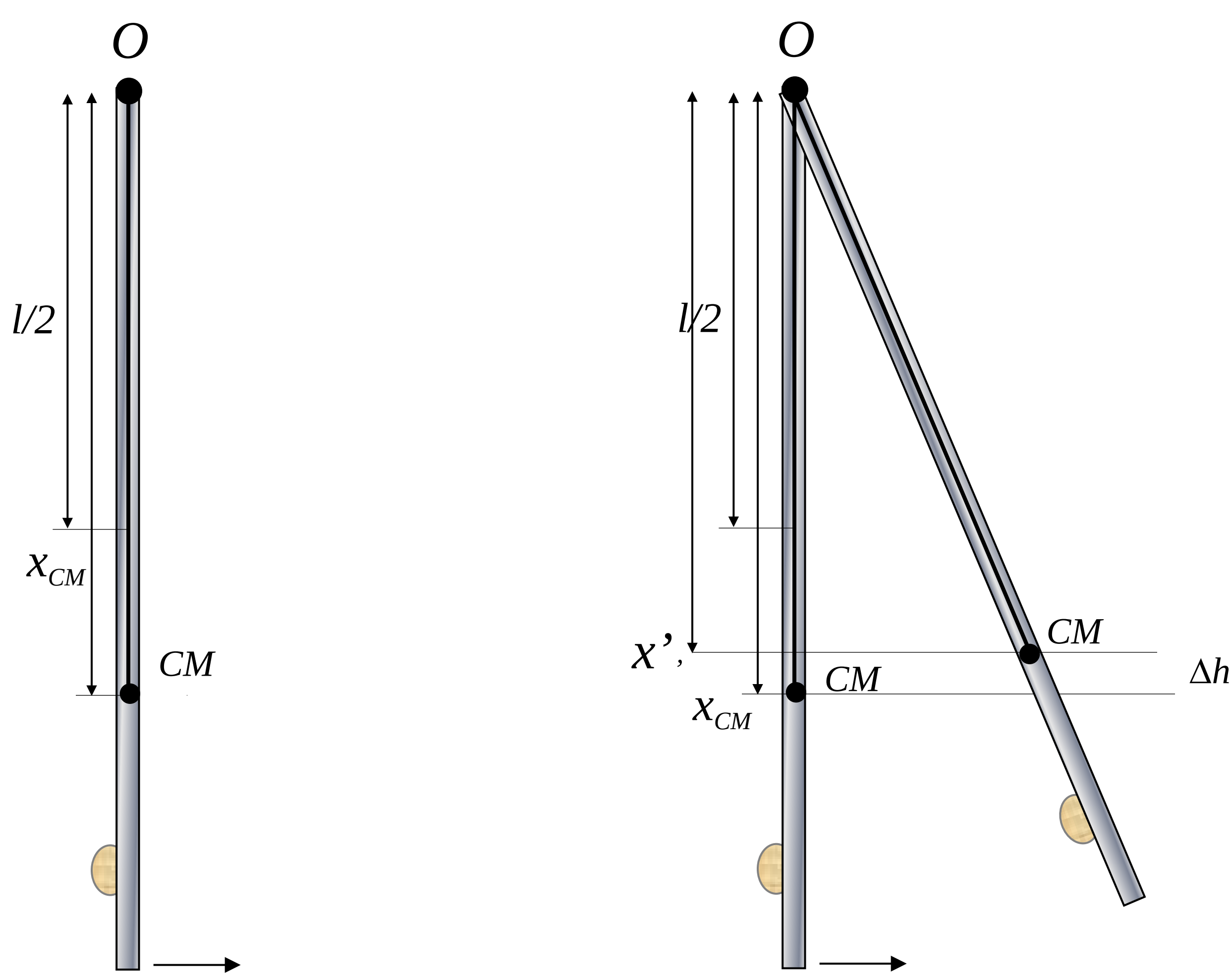
$$E_m = 0 + 2mgx_{CM}$$

in seguito l'energia meccanica diverra'

$$E_m = \frac{1}{2} I\omega^2 + 2mgx'$$

dove x' e' la nuova posizione del centro di massa lungo

l'asse x



uguagliando $$0 + 2mgx_{CM} = \frac{1}{2} I\omega^2 + 2mgx'$$

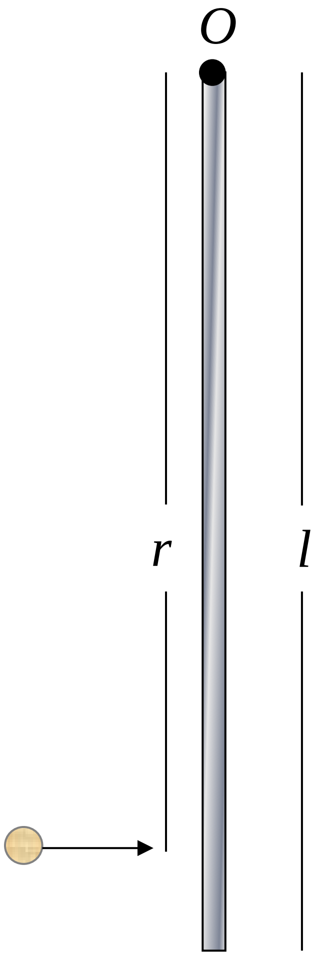
$$2mgx_{CM} - 2mgx' = \frac{1}{2} I\omega^2$$ da cui

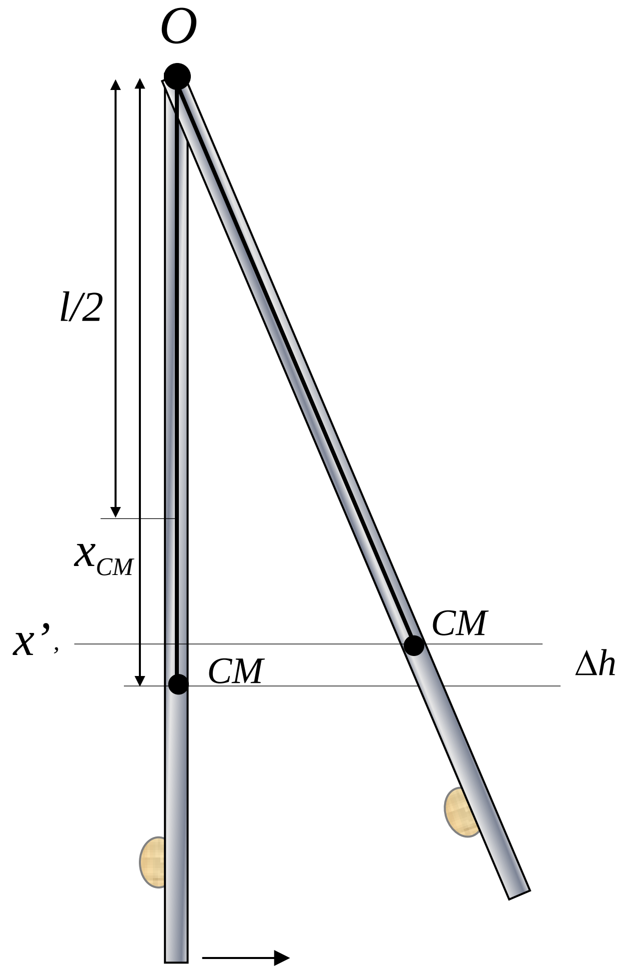
$$2mg(x_{CM} - x') = \frac{1}{2} I\omega^2$$

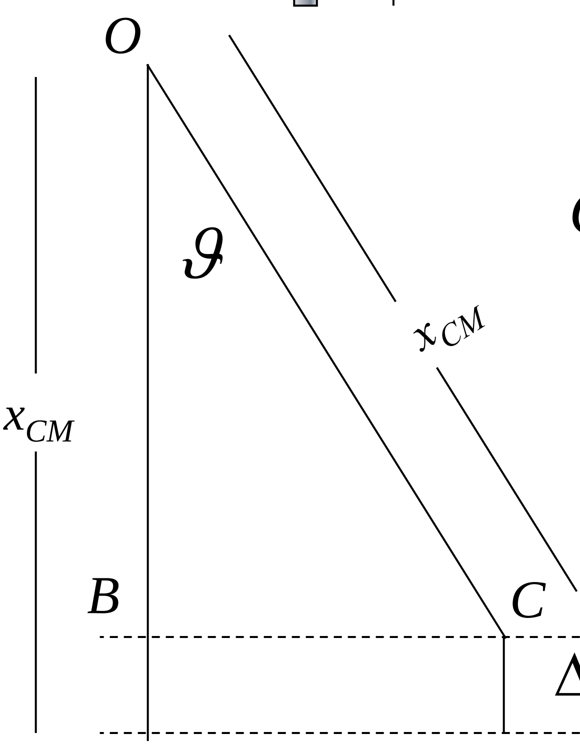
posto $\Delta h = x_{CM} - x'$

$\Delta h > 0$ e' l' innalzamento della posizione del centro di massa

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = 2mg\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{I\omega^2}{4mg}$$







$$OB = OC\cos\vartheta \qquad OB = x_{CM} - \Delta h$$

$$\cos\vartheta = \frac{OB}{OC} = \frac{x_{CM} - \Delta h}{x_{CM}}$$

$$\Delta h = \frac{I\omega^2}{4mg}$$

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\Delta h}{x_{CM}}$$

una volta imposto che l’angolo sia 180 gradi si puo’

ragionare alla rovescia e determinare Δh e da qui

la velocita’ angolare e da qui risalire alla velocita che occorre

dare alla particella per ottenere una rotazione di 180 gradi

Backup Slides