Assi principali d'inerzia di un corpo rigido

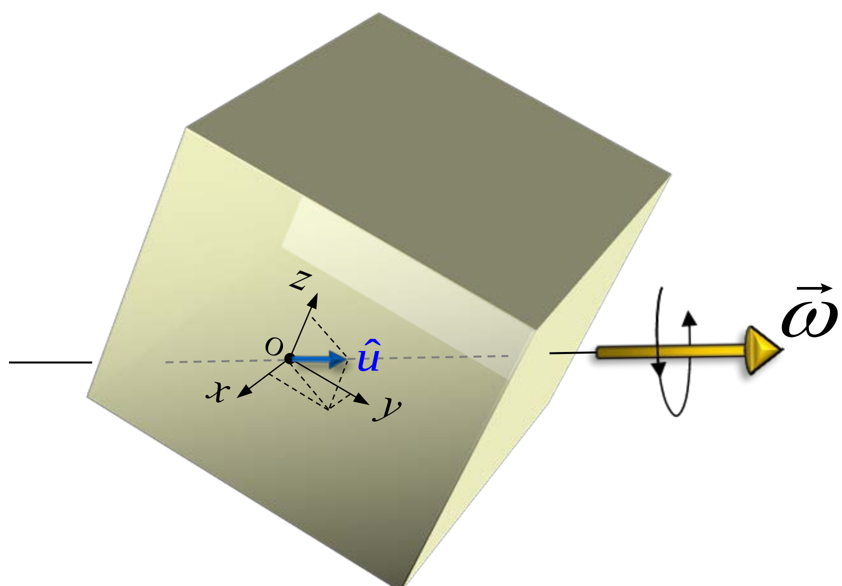
preso un punto qualunque O di un qualsiasi corpo rigido scegliamo un sistema

di riferimento cartesiano solidale al corpo rigido con origine in O

e con i tre assi x, y, z orientati <u>arbitrariamente</u> supponiamo che il corpo stia

ruotando attorno ad un asse di rotazione qualsiasi passante per O e che la

direzione nello spazio dell'asse di rotazione sia individuata dal versore $\hat{u}$



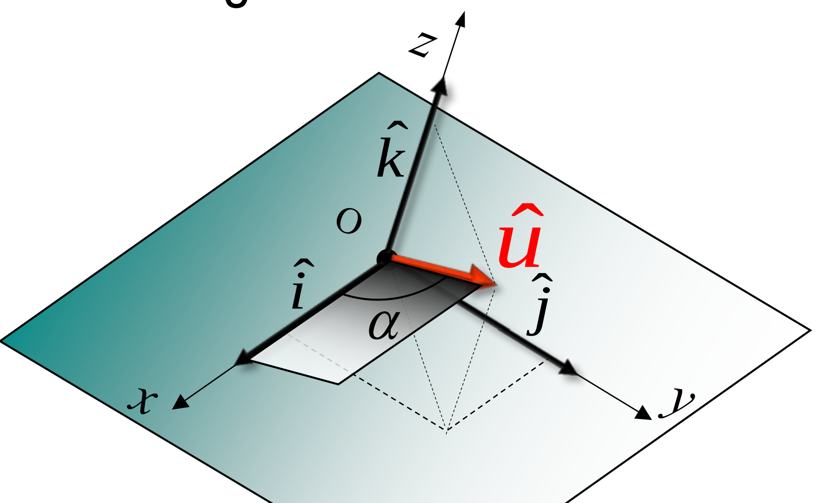
un qualsiasi vettore e quindi anche qualsiasi versore puo'essere scomposto in componenti cartesiani proiettandolo lungo gli assi per il versore $\hat{u}$ si ha

$\hat{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ dove $\alpha\ \beta\ \gamma$, i *coseni direttori*, sono le componenti di $\hat{u}$ rispetto ai tre assi di riferimento x, y, z

come gia' visto in passato $\hat{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$

dove $u_x = \hat{u}\cdot\hat{i} = 1\cdot 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$ quindi

α e' l'angolo che il versore $\hat{u}$ forma con il versore $\hat{i}$ nel piano definito



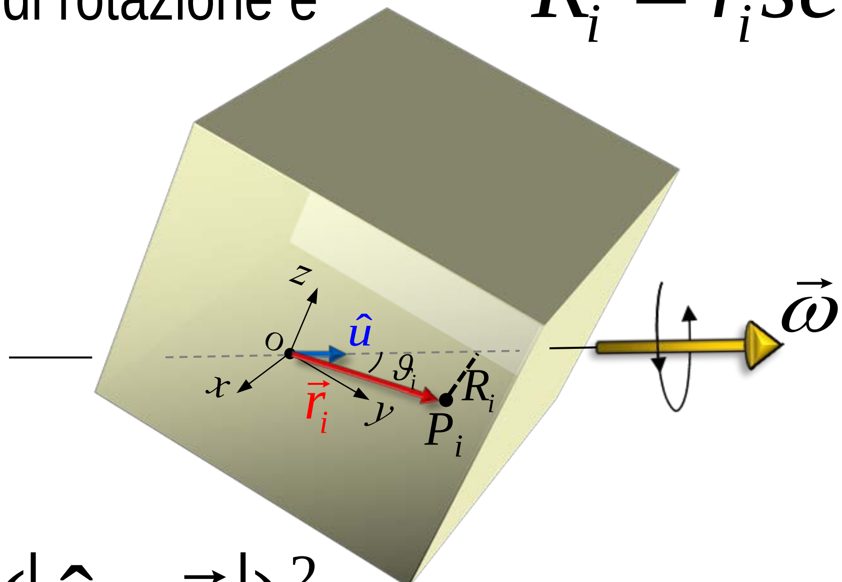
dalle direzioni nello spazio dei due versori

e analogamente per gli angoli β e γ

la posizione di qualsiasi punto P_i del corpo rispetto ad O e' definita dal

vettore posizione $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ e la distanza

del punto P_i dall'asse di rotazione e' $R_i = r_i sen\vartheta_i = \left|\hat{u}\times\vec{r}_i\right|$



$$\Rightarrow \quad m_i R_i^2 = m_i\left(\left|\hat{u}\times\vec{r}_i\right|\right)^2$$

se $\hat{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ e $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

$$\hat{u}\times\vec{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i)\hat{i} + (\gamma x_i - \alpha z_i)\hat{j} + (\beta x_i - \alpha y_i)\hat{k}$$

quadrando $\hat{u} \times \vec{r}_i$ si otterra' $m_i R_i^2$ ossia il ''momento di inerzia'' del

punto materiale P_i rispetto all'asse di rotazione $\hat{u}$

poi per ottenere il momento d'inerzia del corpo rigido occorrera' sommare su

tutti i punti costituenti il corpo

quadrando $\hat{u}\times\vec{r}_i$ e sommando su tutti i punti del corpo rigido si ha

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$$

dove $I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$ e' il momento d'inerzia rispetto all'asse x

$I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$ e' momento d'inerzia rispetto all'asse y

$I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$ e' il momento d'inerzia rispetto all'asse z

infine i cosiddetti ''**prodotti d'inerzia**'' sono dati dalle relazioni

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \qquad I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \qquad I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

sull'asse di rotazione sara' sempre possibile determinare un punto geometrico P,

di coordinate $P(X, Y, Z)$ che disti $d = \frac{1}{\sqrt{I}}$ da O

le coordinate X, Y, Z del punto P saranno

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \qquad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}} \qquad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

perche' se l'estremo del versore $\hat{u}$ che ha lunghezza unitaria

e quindi dista uno da O ha coordinate α, β, γ un punto che disti d da O

dovra' avere coordinate $\alpha d, \beta d, \gamma d$

Fi

dividendo la

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$$

per il momento d'inerzia I si ha

$$1 = I_{xx}\frac{\alpha^2}{I} + I_{yy}\frac{\beta^2}{I} + I_{zz}\frac{\gamma^2}{I} - 2I_{xy}\frac{\alpha\beta}{I} - 2I_{yz}\frac{\beta\gamma}{I} - 2I_{zx}\frac{\gamma\alpha}{I}$$

ossia

$$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$$

questa e' l'equazione a cui devono soddisfare le coordinate di un qualsiasi punto

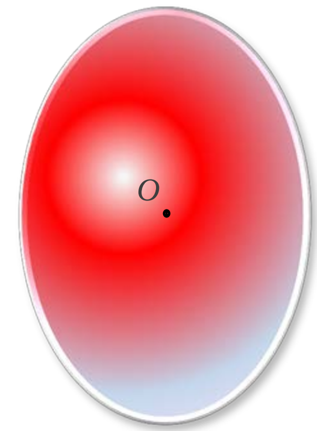
che disti dall'origine O di $\dfrac{1}{\sqrt{I}}$ dove I e' il momento d'inerzia del corpo

rispetto all'asse di rotazione definito dai punti O e P

l’insieme dei punti (il ’’luogo dei punti’’) che soddisfano questa relazione

e’ una superficie elissoidale con centro in O detta *“ elissoide di inerzia “*

del corpo rigido rispetto al punto O questo e’ vero



qualunque sia la distribuzione di massa del corpo

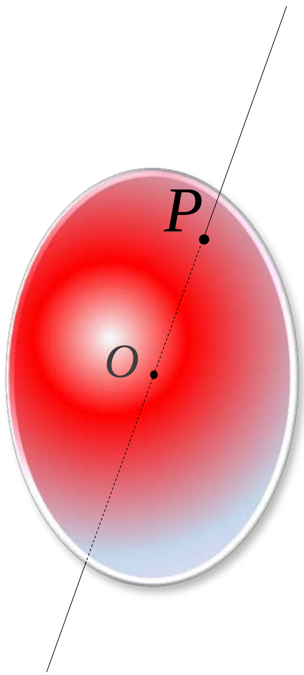
e comunque si scelga l’origine O “*teorema di Poinsot*” :

l’elissoide d’inerzia e’ fisso rispetto al corpo e non dipende dalla scelta

del sistema di riferimento, ma solo da O quindi e’ sempre possibile determinare l’elissoide d’inerzia di un corpo rigido

e il momento d’ inerzia del corpo rispetto a qualsiasi asse di rotazione

passante per il centro dell’elissoide   si potra’ otterere



semplicemente calcolando la distanza tra O

e il punto geometrico P di intersezione

dell’asse con l’elissoide,

infatti la distanza OP vale $\dfrac{1}{\sqrt{I}}$

nell' elissoide di inerzia vi sono sempre

un diametro massimo ed un diametro minimo,

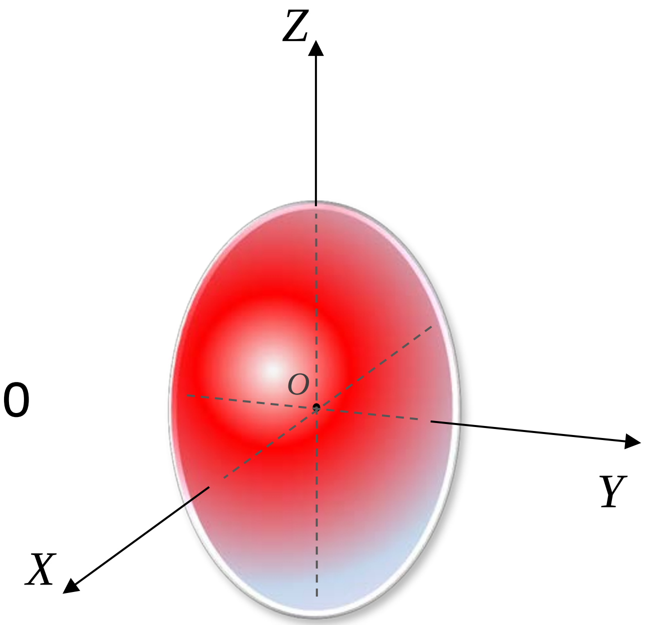
e gli assi orientati nella direzione del diametro massimo

e del diametro minimo sono ortogonali tra loro

e insieme ad un terzo asse perpendicolare ad entrambi

formano gli assi dell'elissoide d'inerzia del corpo rigido

detti anche " *assi principali d'inerzia* "



se come assi $x,y, z,$ solidali al corpo si scegliessero gli assi dell'elissoide

la $$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$$

si semplificherebbe e diventerebbe $$I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1$$

dove I_x , I_y , I_z , sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto

agli assi dell'elissoide, ossia agli assi principali d'inerzia

I_x, I_y e I_z sono i cosiddetti " *momenti principali d'inerzia*" se il punto O coincidesse con il centro di massa si userebbe la denominazione

di "*elissoide centrale d'inerzia*" e di "*assi centrali d'inerzia*"

gli assi centrali di inerzia sono sempre <u>almeno</u> tre

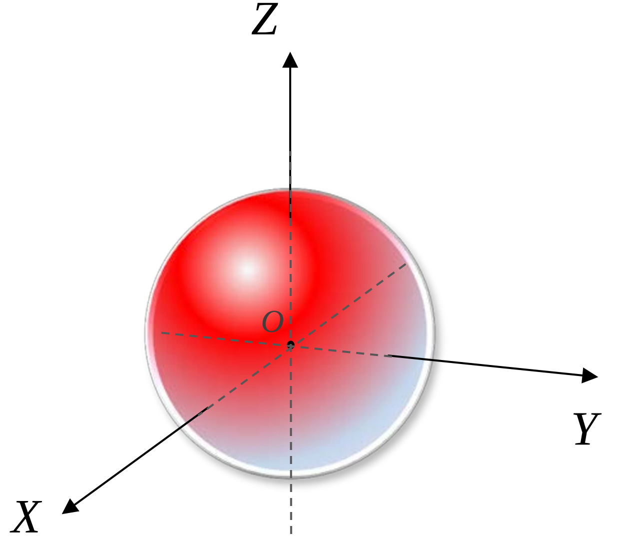
ma possono essere di piu' di tre se il corpo e' dotato di particolari

proprieta' di simmetria

per esempio se l'elissoide si riducesse ad una

superficie sferica qualsiasi asse passante per O

sarebbe un asse centrale d'inerzia



- Nota bene : l’ equazione che definisce l’elissoide d’inerzia non dipende soltanto dalla forma del corpo rigido, ma anche dalla distribuzione delle masse al suo interno

- Nota bene: l’elissoide d’inerzia non e’ una parte di corpo rigido di forma elissoidale

  l’elissoide d’inerzia e’ una superficie geometrica definita da una equazione matematica che specifica le caratteristiche del corpo rigido dal punto di vista delle rotazioni intorno ad un asse per definizione $$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

del tutto in generale $$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

esplicitando le componenti cartesiane della $$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

si ha $$L_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

$$\vec{L} = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\hat{i} +$$

$$(-I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\hat{j} +$$

$$(-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\hat{k}$$

dato che $\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$ e' evidente che

$\vec{L}$ non e' proporzionale a $\vec{\omega}$

la matrice $\begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$ e’ la “*matrice d’inerzia*”

se scegliessimo come assi di riferimento gli assi principali d’inerzia la

matrice d’inerzia diagonalizzerebbe e la relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ si semplificherebbe in

$$\vec{L} = I_x\omega_x\hat{i} + I_y\omega_y\hat{j} + I_z\omega_z\hat{k}$$

in conclusione

per ogni corpo rigido qualunque sia la sua forma geometrica e la sua

distribuzione di massa esisteranno sempre tre, (o piu') assi passanti per

un determinato, (peraltro a sua volta qualsiasi) punto fisso O del corpo

questi assi sono perpendicolari tra di loro e godono della proprieta' che

quando il corpo ruota rispetto ad uno di essi $\vec{L}$ e' parallelo ad $\vec{\omega}$

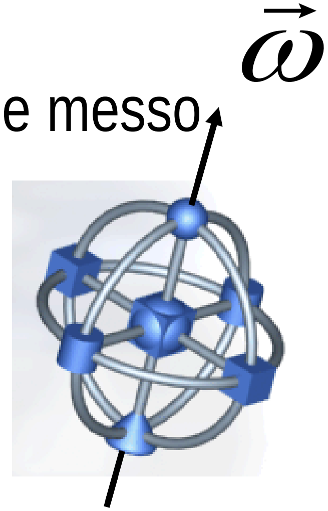
questo significa che quando si ha a che fare con corpi rotanti

con una opportuna progettazione sara' sempre possibile, almeno in teoria,

realizzare una configurazione minimizzi, o al limite azzeri, le sollecitazioni

dinamiche sui supporti dell'asse di rotazione

Giroscopio



se un corpo rigido fosse sottoposto alla sola forza peso e venisse messo

in rotazione rispetto ad un asse centrale d’inerzia,

il centro di massa del corpo starebbe sull’asse di rotazione,

e dato che la forza peso si puo’ pensare esercitata sul centro di massa del corpo

non ha momento risultante rispetto al centro di massa stesso percio’

non ci sarebbe nessun momento esterno che faccia cambiare direzione all’asse

- quindi l’asse di rotazione conserverebbe invariata la sua direzione nello spazio

→ principio di funzionamento dei giroscopi

Backup Slides