Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

data una massa puntiforme m e una superficie chiusa e finita detta "superficie gaussiana"

che racchiuda la massa m al suo interno il teorema di Gauss afferma che qualunque

sia la forma della superficie si ha

$$\Phi(\vec{G}) = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma m$$

se vi fossero piu' masse all'interno della superficie sferica $\Phi(\vec{G}) = -4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i$

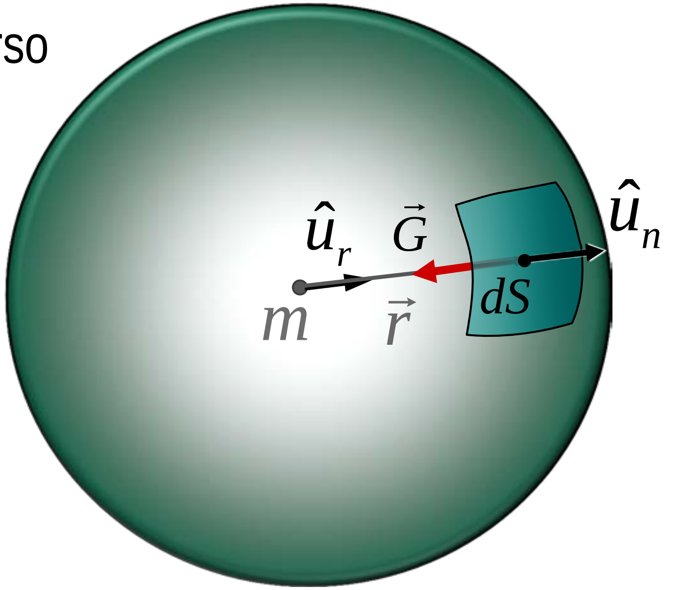
viceversa se la massa e' esterna alla superficie gaussiana si ha $\Phi(\vec{G}) = 0$

Nota bene : la superficie gaussiana non e' una superficie reale ! E' una superfice fittizia definita da un equazione matematica

Superficie gaussiana sferica e concentrica alla massa

data una massa puntiforme m e una superficie sferica di raggio r concentrica alla massa m

orientiamo la superficie sferica (gaussiana) positivamente verso l' <u>esterno</u> e dividiamo la superficie della sfera in superfici infinitesime orientate $d\vec{S} = dS\hat{u}_n$



il flusso infinitesimo $d\Phi$ del campo gravitazionale $\vec{G}$

sulla superficie infinitesima $d\vec{S}$ sara' $d\Phi = \vec{G} \cdot d\vec{S}$

$$d\Phi = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{u}_r \cdot dS\hat{u}_n$$

ossia $d\Phi = -\gamma \frac{m}{r^2} dS(\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n)$ ma $(\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n) = 1 \cdot 1 \cdot cos(0) = 1$

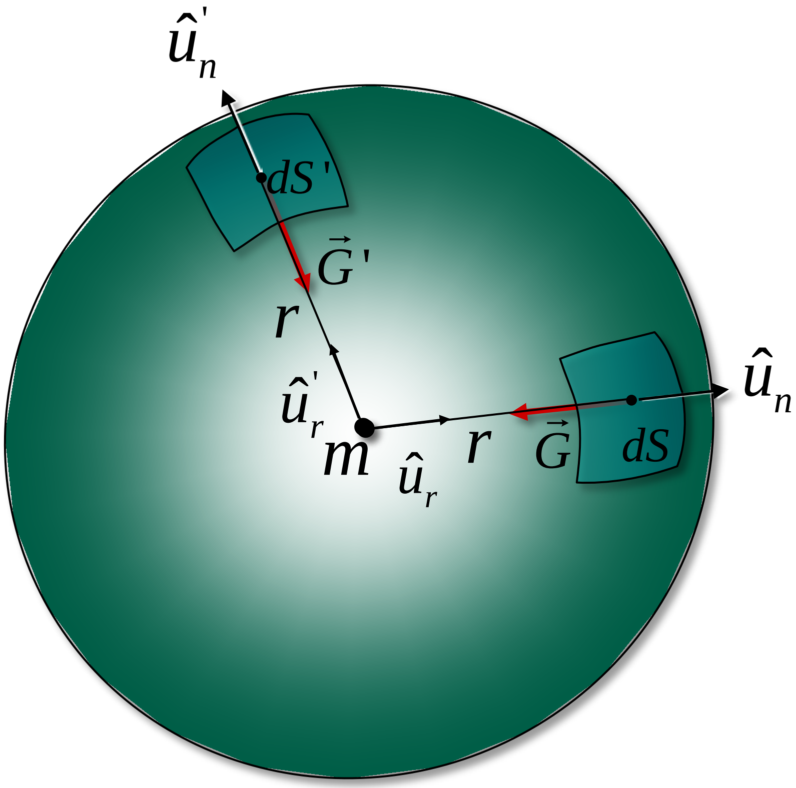
dunque $d\Phi = -\gamma m \frac{dS}{r^2}$ per calcolare il flusso totale occorrera' integrare

sulla intera superficie sferica $\Phi(\vec{G}) = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S}$

quando si sceglie una seconda qualsiasi superficie infinitesima dS'

i versori $\hat{u}_n^{'}$ e $\hat{u}_r^{'}$ rimarranno paralleli dato che la forza e' centrale

e punta sempre verso il centro



inoltre la distanza r rimarra' la stessa

dato che la sfera e' concentrica alla massa m

$$\Phi(\vec{G}) = -\gamma m \oint_{Sfera} \frac{dS}{r^2}$$

$$= -\frac{\gamma m}{r^2} \oint_{Sfera} dS \quad = -4\pi\gamma m$$

in conclusione $\Phi(\vec{G}) = -4\pi\gamma m$

viceversa se la massa e' <u>esterna</u> alla superficie gaussiana si ha $\Phi(\vec{G}) = 0$

se vi fossero piu' masse all'interno della superficie sferica $\Phi(\vec{G}) = -4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i$

si puo' dimostrare che i precedenti risultati sono veri QUALUNQUE sia la forma della superficie

Backup Slides