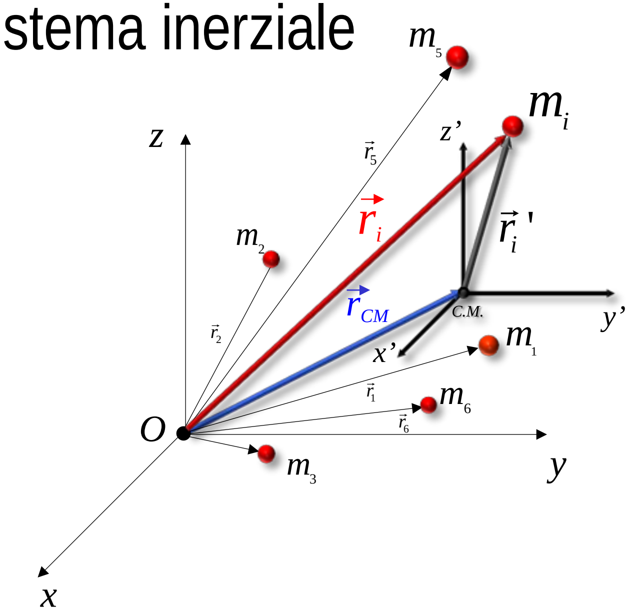
Teoremi di Konig

assumendo, per semplicita', che il polo coincida con l'origine del sistema

di riferimento inerzialeil momento angolare totale nel sistema inerziale



sara' $$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

dato che $\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{r}_{CM}$ e $\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_i\,' + \vec{\mathrm{v}}_{CM}$

che relazione intercorre tra il momento angolare totale

valutato rispetto al sistema inerziale ed il momento angolare totale calcolato

rispetto al sistema di riferimento del centro di massa ?

sostituendo $\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,'} + \vec{r}_{CM}$ e $\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,'} + \vec{v}_{CM}$ nella $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i^{\,'} + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i^{\,'} + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \vec{v}_i^{\,'} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i^{\,'} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$

dunque

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,'} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{CM} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,'} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{CM}$$

ma

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,'} = \vec{L}\,'$$ = momento angolare rispetto al centro di massa

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{CM} = \vec{L}_{CM}$$ = momento angolare del centro di massa rispetto al sistema di riferimento inerziale

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i^{\,'} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_{CM} = 0$$ e $$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,'} = 0$$ perche' se $\vec{r}_{CM}^{\,'} = 0$

e $\vec{\mathrm{v}}_{CM}^{\,'} = 0$ $\Rightarrow$ $$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,'} = 0$$ e $$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{\,'} = \vec{Q}^{\,'} = 0$$

Primo teorema di Konig (teorema di Konig per il momento angolare)

$$\vec{L} = \vec{L}\,' + \vec{L}_{CM}$$

il momento angolare totale del sistema di punti nel sistema inerziale

si puo scrivere come la somma vettoriale del momento angolare

dovuto al moto del centro di massa rispetto al riferimento inerziale

piu' il momento angolare totale dovuto al moto del sistema di punti

rispetto al suo centro di massa

Secondo teorema di Konig (teorema di Konig per l'energia cinetica)

l'energia cinetica nel sistema di riferimento inerziale e'

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2$$ usando la $$\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_i^{'} + \vec{\mathrm{v}}_{CM}$$

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{\mathrm{v}}_i^{'} + \vec{\mathrm{v}}_{CM})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\mathrm{v}_i^{'2} + \mathrm{v}_{CM}^2 + 2\vec{\mathrm{v}}_i^{'} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{CM})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^{'2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i \; \vec{\mathrm{v}}_i^{'} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{CM}$$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^{'2}$ energia cinetica rispetto al sistema del centro di massa

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_{CM}^{2}$ energia cinetica di in punto materiale di massa pari alla massa totale del corpo e che si muova con la velocita' del centro di massa → energia cinetica del centro di massa

il termine $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{'} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{CM} = (\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\mathrm{v}}_i^{'}) \cdot \vec{\mathrm{v}}_{CM} = \vec{Q}^{'} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{CM}$

e' identicamente nullo perche' $\vec{Q}^{'}$ e' la quantita' di moto totale

del centro di massa rispetto a se stesso e quindi e' nulla quindi

$$E_C = E_C' + E_{C_{CM}}$$

secondo teorema di Konig

(teorema di Konig per l'energia cinetica)

l'energia cinetica totale del sistema di punti calcolata nel sistema inerziale

e' uguale alla somma

- dell'energia cinetica dei punti del sistema rispetto al centro di massa
- piu' l'energia cinetica del centro di massa rispetto al sistema inerziale

in conclusione: se per quanto riguarda la quantita' di moto totale

e la risultante delle forze esterne applicate al sistema di punti materiali

tutto va come se si potesse sostituire al sistema esteso un punto rappresentativo,

in cui e' concentrata tutta la massa del sistema e su cui si applica la risultante

di tutte le forze esterne $\rightarrow$ teorema del centro di massa,

per il momento angolare totale e l'energia cinetica totale

del sistema di punti il centro di massa non riassume le

proprieta' del sistema

e i teoremi di Konig mostrano chiaramente l'importanza del moto rispetto

al centro di massa

per ricavare il momento angolare totale e l’energia cinetica totale non e’

sufficiente conoscere la quantita’ di moto e la risultante delle forze esterne,

ossia il moto del centro di massa rispetto al sistema inerziale, ma bisogna

tenere anche conto del moto del sistema di punti rispetto al centro di massa

Backup Slides