

Assi principali d'inerzia di un corpo rigido

scelto un punto qualunque O di un corpo rigido scegliamo un sistema

di riferimento cartesiano solidale al corpo rigido con origine in O

e con i tre assi x, y, z orientati arbitrariamente ipotizziamo che il corpo stia

ruotando attorno ad un asse di rotazione qualsiasi ma passante per O

la direzione nello spazio dell'asse di rotazione sia individuata dal versore \hat{u}

la posizione di qualsiasi punto P_i del corpo rispetto ad O e' definita dal

vettore posizione $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$ e la distanza

del punto P_i dall'asse di rotazione e' $R_i = r_i \text{sen} \vartheta_i = |\hat{u} \times \vec{r}_i|$

$$\Rightarrow m_i R_i^2 = m_i (|\hat{u} \times \vec{r}_i|)^2$$

se $\hat{u} = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k}$ e $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$

$$\hat{u} \times \vec{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i) \hat{i} + (\gamma x_i - \alpha z_i) \hat{j} + (\beta x_i - \alpha y_i) \hat{k}$$

quadrando $\hat{u} \times \vec{r}_i$ si otterra' $m_i R_i^2$ ossia il "momento di inerzia" del

punto materiale P_i rispetto all'asse di rotazione \hat{u}

per ottenere il momento d'inerzia del corpo rigido occorrera' sommare su

tutti i punti costituenti il corpo

quadrando $\hat{u} \times \vec{r}_i$ e sommando su tutti i punti del corpo rigido si ha

$$I = I_{xx} \alpha^2 + I_{yy} \beta^2 + I_{zz} \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha\beta - 2I_{yz} \beta\gamma - 2I_{zx} \gamma\alpha$$

dove $I_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$ e' il momento d'inerzia rispetto all'asse x

$I_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$ e' momento d'inerzia rispetto all'asse y

$I_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$ e' il momento d'inerzia rispetto all'asse z

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i$$

sono i "prodotti d'inerzia"

sara' sempre possibile trovare sull'asse di rotazione un punto

di coordinate $P(X, Y, Z)$ che disti $d = \frac{1}{\sqrt{I}}$ da O

le coordinate X, Y, Z di questo punto saranno

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}} \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

perche' se l'estremo del versore \hat{u} che ha modulo unitario

e quindi dista uno da O ha coordinate α, β, γ un punto che disti d da O

dovra' avere coordinate $\alpha d, \beta d, \gamma d$

dividendo la

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$$

per il momento d'inerzia I si ha

$$1 = I_{xx}\frac{\alpha^2}{I} + I_{yy}\frac{\beta^2}{I} + I_{zz}\frac{\gamma^2}{I} - 2I_{xy}\frac{\alpha\beta}{I} - 2I_{yz}\frac{\beta\gamma}{I} - 2I_{zx}\frac{\gamma\alpha}{I}$$

ossia

$$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$$

questa e' l'equazione a cui devono soddisfare le coordinate di un qualsiasi punto

che disti $\frac{1}{\sqrt{I}}$ dall'origine O dove I e' il momento d'inerzia del corpo

rispetto all'asse di rotazione definito dai punti O e P

l'insieme dei punti (il "luogo dei punti") che soddisfano questa relazione

e' una superficie ellissoidale con centro in O detta " *elissoide di inerzia* "

del corpo rigido rispetto al punto O questo e' vero

qualunque sia la distribuzione di massa del corpo

e comunque si scelga l'origine O " *teorema di Poinsot* " :

l'elissoide d'inerzia e' fisso rispetto al corpo e non dipende dalla scelta

del sistema di riferimento, ma solo da O

quindi e' sempre possibile determinare l'elissoide d'inerzia di un corpo rigido

e il momento d'inerzia del corpo rispetto a qualsiasi asse di rotazione

passante per il centro dell'elissoide si potra' ottenere

calcolando la distanza tra O

e il punto geometrico P di intersezione

dell'asse con l'elissoide,

infatti la distanza OP vale $\frac{1}{\sqrt{I}}$

nell' ellissoide di inerzia vi sono sempre

un diametro massimo ed uno minimo,

e gli assi orientati nella direzione di questi due diametri

sono perpendicolari tra loro e insieme ad un terzo asse

perpendicolare ad entrambi formano gli assi dell'ellissoide d'inerzia

del corpo rigido detti “ *assi principali d'inerzia* ”

se come assi x, y, z , solidali al corpo si scegliessero gli assi dell'elissoide

$$\text{la } I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$$

si semplificherebbe e diventerebbe $I_xX^2 + I_yY^2 + I_zZ^2 = 1$

dove I_x, I_y, I_z , sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto

agli assi dell'elissoide, ossia agli assi principali d'inerzia

I_x, I_y e I_z sono i " *momenti principali d'inerzia*"

se il punto O coincide con il centro di massa si parla

di "*elissoide centrale d'inerzia*" e di "*assi centrali d'inerzia*"

gli assi centrali di inerzia sono sempre **almeno** tre

ma possono essere di più se il corpo è dotato di proprietà di simmetria

→ se l'elissoide divenisse una superficie sferica

qualsiasi asse passante per O

sarebbe un asse centrale d'inerzia

➤ Nota bene :

l'equazione che definisce l'elissoide d'inerzia non dipende soltanto dalla forma del corpo rigido, ma anche dalla distribuzione delle masse al suo interno

l'elissoide d'inerzia è una superficie geometrica definita da una equazione matematica che specifica le caratteristiche del corpo rigido dal punto di vista delle rotazioni intorno ad un asse

➤ dunque l'elissoide d'inerzia non è una parte di corpo rigido di forma ellissoidale

per definizione
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

del tutto in generale
$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

esplicitando le componenti cartesiane della
$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

si ha
$$L_x = I_{xx} \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z$$

$$L_y = -I_{xy} \omega_x + I_{yy} \omega_y - I_{yz} \omega_z$$

$$L_z = -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_y + I_{zz} \omega_z$$

$$\vec{L} = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\hat{i} +$$

$$(-I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\hat{j} +$$

$$(-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\hat{k}$$

dato che $\vec{\omega} = \omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}$ e' evidente che

\vec{L} non e' proporzionale a $\vec{\omega}$

la matrice

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

e' la "matrice d'inerzia"

se scegliessimo come assi di riferimento gli assi principali d'inerzia la

matrice d'inerzia diagonalizzerebbe e la relazione tra \vec{L} e $\vec{\omega}$ si semplificherebbe in

$$\vec{L} = I_x \omega_x \hat{i} + I_y \omega_y \hat{j} + I_z \omega_z \hat{k}$$

in conclusione

per ogni corpo rigido qualunque sia la sua forma geometrica e la sua

distribuzione di massa esisteranno sempre tre, (o piu') assi passanti per

un qualsiasi punto fisso O del corpo

questi assi sono perpendicolari tra di loro e hanno la caratteristica che

quando il corpo ruota rispetto ad uno di essi \vec{L} e' parallelo ad $\vec{\omega}$

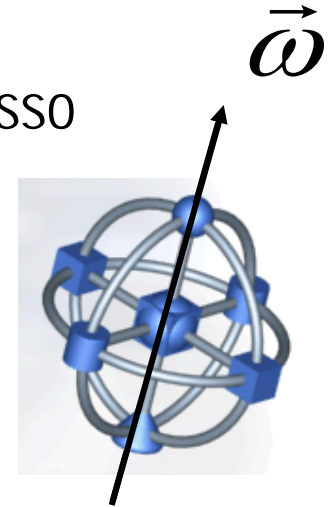
→ nel caso di corpi rotanti in teoria, e' sempre possibile,
realizzare una configurazione che minimizzi, o al limite azzeri,
le sollecitazioni dinamiche sui supporti dell'asse di rotazione
e tuttavia non sempre sara' possibile realizzare questa condizione
in pratica anche se lo sarebbe sempre in teoria
dunque sara' necessaria una accurata progettazione

Giroscopio

se un corpo rigido , sottoposto alla sola forza peso, venisse messo

in rotazione rispetto ad un asse centrale d'inerzia,

il centro di massa del corpo sarebbe sull'asse di rotazione,



e dato che la forza peso si puo' pensare esercitata sul centro di massa del corpo

non avrebbe momento risultante rispetto al centro di massa stesso perciò

non ci sarebbe nessun momento esterno che faccia cambiare direzione all'asse

➤ quindi l'asse di rotazione conserverebbe invariata la sua direzione nello spazio

→ principio di funzionamento dei giroscopi

Backup Slides