Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

data una massa puntiforme m e una superficie Σ chiusa e finita detta "superficie gaussiana"

che <u>racchiuda</u> la massa m al suo interno il teorema di Gauss afferma che <u>qualunque</u>

sia la forma della superficie Σ si ha

$$\Phi_\Sigma(\vec{G}) = \oint_\Sigma d\Phi = \oint_\Sigma \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma m$$

se vi fossero piu' masse all'interno della superficie gaussiana $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} m_i$

viceversa se la massa fosse <u>esterna</u> alla superficie gaussiana si avrebbe $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = 0$

<u>Nota bene</u> : la superficie gaussiana non e’ una superficie reale ma e’ una superficie fittizia definita da un equazione matematica

Caso Particolare:

superficie gaussiana sferica e concentrica alla massa

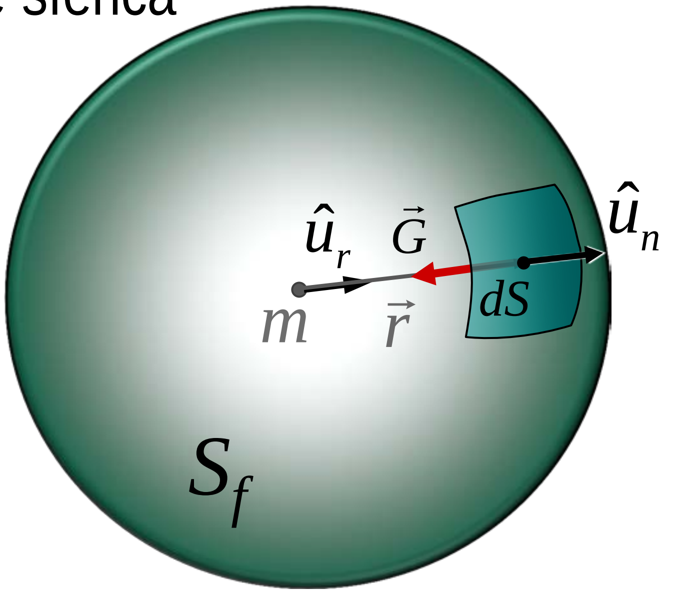
data una massa puntiforme m e una superficie <u>sferica</u> S_f di raggio r

<u>concentrica</u> alla massa m orientiamo la superficie sferica

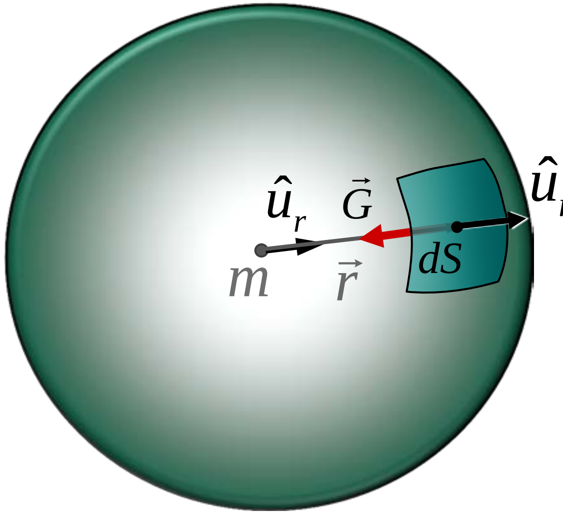
positivamente verso l' <u>esterno</u>

e dividiamo la superficie della sfera in superfici

infinitesime orientate $d\vec{S} = dS\hat{u}_n$



il flusso infinitesimo $d\Phi$ del campo gravitazionale $\vec{G}$



sulla superficie infinitesima $d\vec{S}$ sara' $$d\Phi = \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

$$d\Phi = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{u}_r \cdot dS \hat{u}_n$$

ossia $$d\Phi = -\gamma \frac{m}{r^2} dS (\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n)$$

ma $$(\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n) = 1 \cdot 1 \cdot cos(0) = 1$$

dunque $$d\Phi = -\gamma m \frac{dS}{r^2}$$ per calcolare il flusso totale occorrera' integrare

sulla intera superficie sferica $$\Phi_{S_f}(\vec{G}) = \oint_{S_f} d\Phi = \oint_{S_f} \vec{G} \cdot d\vec{S}$$

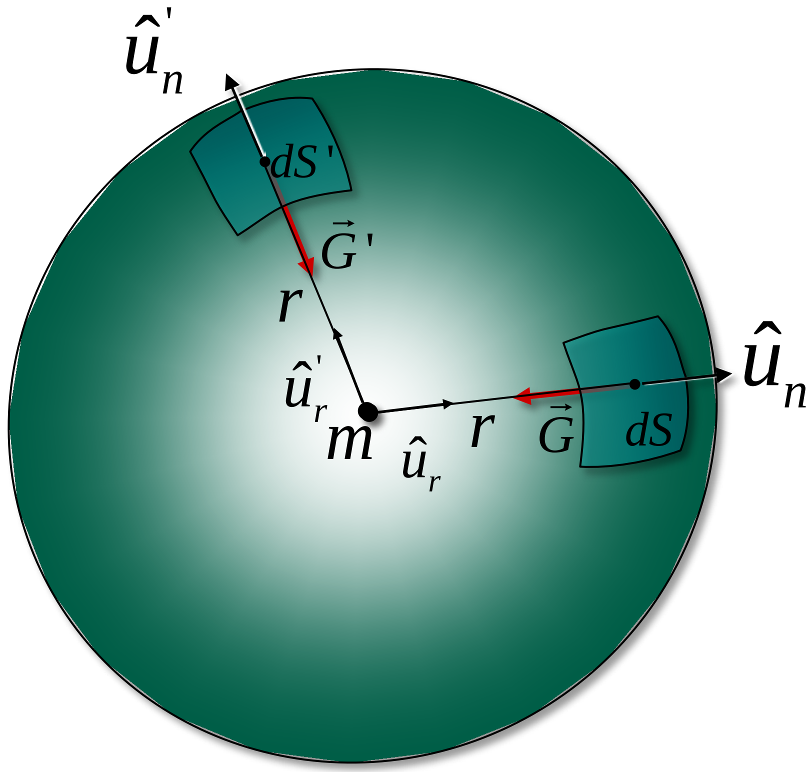
quando si sceglie una seconda qualsiasi superficie infinitesima dS'

i versori $\hat{u}_n'$ e $\hat{u}_r'$ rimarranno paralleli dato che la forza e' centrale

e punta sempre verso il centro

inoltre la distanza r rimarra' la stessa

dato che la sfera e' concentrica alla massa m



$$\Phi_{S_f}(\vec{G}) = -\gamma m \oint_{Sfera} \frac{dS}{r^2}$$

$$= -\frac{\gamma m}{r^2} \oint_{Sfera} dS = -4\pi\gamma m$$

da notare come $\dfrac{dS}{r^2} = d\Omega$

quindi $-\gamma m \oint_{Sfera} d\Omega = -4\pi\gamma m$

in conclusione $\Phi_{S_f}(\vec{G}) = -4\pi\gamma m$

viceversa se la massa e' <u>esterna</u> alla superficie gaussiana si ha $\Phi_{S_f}(\vec{G}) = 0$

se vi fossero piu' masse all'interno della superficie sferica $$\Phi_{S_f}(\vec{G}) = -4\pi\gamma\sum_{i=1}^{n} m_i$$

Backup Slides