Fisica B

Esercitazioni

Dott: Gianluca Pagnoni

E-mail: gianluca.pagnoni3@unibo.it

Operatore differenziale Nabla

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

coordinate cartesiane

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

coordinate cilindriche

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

coordinate sferiche

Consideriamo un campo vettoriale generico:

$$\vec{v} = \hat{i}\, v_x + \hat{j}\, v_y + \hat{k}\, v_z$$

Può essere applicato come divergenza e restituisce un numero reale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

Può essere applicato come rotore e restituisce un' altro campo vettoriale

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\partial_y v_z - \partial_z v_y\right) - \hat{j}\left(\partial_x v_z - \partial_z v_x\right) + \hat{k}\left(\partial_x v_y - \partial_y v_x\right)$$

dove: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \partial_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \partial_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \partial_z \end{cases}$

Data una funzione $f(x, y, z)$

Il gradiente è: $$\vec{\nabla} f = \frac{\partial}{\partial x} f \, \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} f \, \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} f \, \hat{k}$$

Calcolare la divergenza del campo vettoriale $\vec{v} = \left(x^2, xy, xy/z\right)$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(x^2, xy, xy/z\right) = 2x + x - xy/z^2$$

Calcolare il rotore del campo vettoriale $\vec{v} = \left(x^2, xy, xy/z\right)$

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\partial_y v_z - \partial_z v_y\right)\hat{i} - \left(\partial_x v_z - \partial_z v_x\right)\hat{j} + \left(\partial_x v_y - \partial_y v_x\right)\hat{k} =$$

$$= \left(x/z - 0\right)\hat{i} - \left(y/z - 0\right)\hat{j} + \left(y - 0\right)\hat{k} = x/z\,\hat{i} - y/z\,\hat{j} + y\hat{k}$$

Siano dati il vettore costante $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ e il campo vettoriale $\vec{v} = (x^2, xy, xy/z)$. Calcolare il gradiente della grandezza $\vec{c} \cdot \vec{v}$.

$$\nabla(c \cdot \vec{v}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(c_1, c_2, c_3)(x^2, xy, xy/z) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(c_1 x^2 + c_2 xy + c_3\, xy/z) =$$

$$= (2c_1 x + c_2 y + c_3\, y/z\, , c_2 x + c_3\, x/z\, , -c_3\, xy/z^2)$$

Sia $F:\Re^2 \rightarrow \Re^2$ il campo vettoriale

$$F(x,y)=\left(\frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2},-\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Dire se ammette potenziale e in caso affermativo determinare f di F.

Poniamo $F=\left(f_1,f_2\right)$

con $f_1(x,y)=\frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2},\ f_2(x,y)=-\frac{1}{1+x^2}$

$f_1,f_2 \in C^\infty su\Re^2 \rightarrow F \in C^\infty su\Re^2$ **F** è semplicemente connesso

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ **F** è conservativo

Determiniamo ora un potenziale $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{F}$. Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) = \frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Integrando la seconda rispetto $\boldsymbol{y}$ si ottiene

$$f(x,y) = -\int \frac{1}{1+x^2}\,dy = -\frac{y}{1+x^2} + c(x)$$

Sostituendo nella prima

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2} + c'(x) = \frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c \in \Re$$

Otteniamo che un potenziale $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{F}$ è

$$f(x,y) = -\frac{y}{1+x^2} + c, c \in \Re$$

Dato il campo vettoriale $\vec{v} = \frac{1}{3}a(x, y, z)$ calcolarne il flusso attraverso una superficie cubica di lato $\boldsymbol{L}$ centrata nell'origine

$$\delta\vec{\Sigma} = (0,0,\delta x\delta y)$$

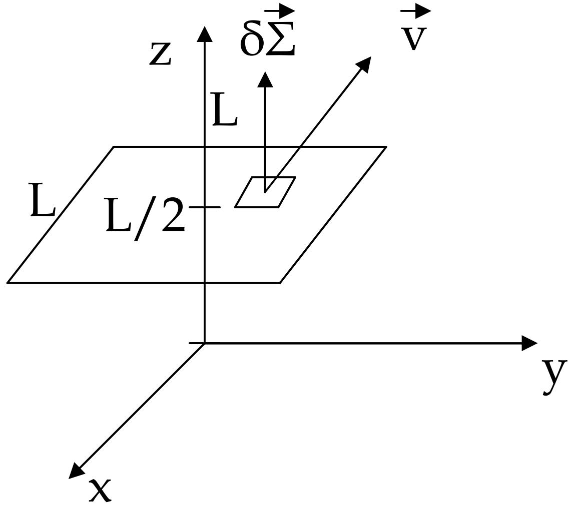
$$\vec{v} = \frac{a}{3}(x, y, z)$$

1 - metodo: calcolo diretto

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{v}\cdot\delta\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_1} \frac{a}{3}(x, y, z)\cdot(0,0,\delta x\delta y)$$

$$= \iint_{\Sigma_1} \frac{a}{3} z\delta x\delta y = \frac{a}{3}\frac{L}{2}\iint_{\Sigma_1} \delta x\delta y =$$

$$= \frac{aL}{6}L^2 = \frac{aL^3}{6}$$



Dato il campo vettoriale $\vec{v} = \frac{1}{3} a(x, y, z)$ calcolarne il flusso attraverso una superficie cubica di lato L centrata nell'origine

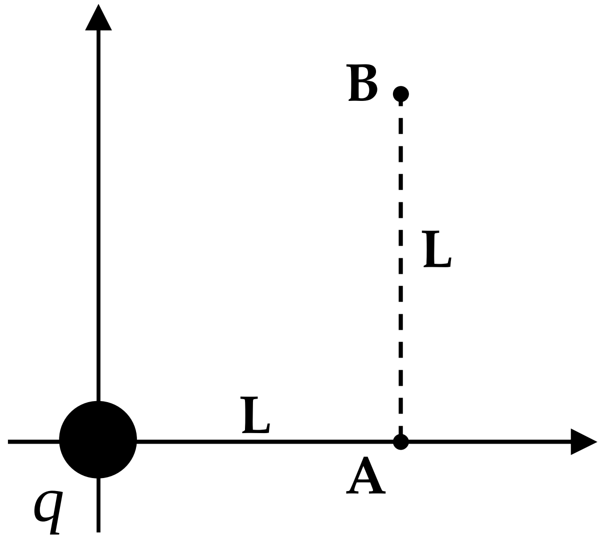
2 - metodo: utilizziamo il teorema della divergenza $\iiint_{V_\Sigma} \nabla \cdot \vec{v}\,\delta V = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec{v} \cdot \delta\vec{\Sigma}$

Calcoliamo allora $\nabla \cdot \vec{v}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x, y, z) \frac{a}{3} = \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = a$$

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec{v} \cdot \delta\vec{\Sigma} = \iiint_{V_\Sigma} a\,\delta V = a \iiint_{V_\Sigma} \delta V = aL^3$$

Calcolare l'integrale di linea del campo elettrostatico generato dalla carica elettrica q lungo il percorso tratteggiato che congiunge A e B



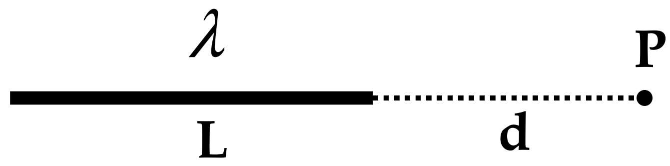
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$ Campo elettrostatico è conservativo

$$\vec{E} = -gradV \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + V_\infty$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\delta\vec{l} = V_A - V_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}L} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2-\sqrt{2}}{L}$$

Calcolare modulo direzione e verso del campo elettrostatico $\vec{E}$ generato nel punto *P* dalla distribuzione lineare finita ed uniforme di carica elettrica indicata in figura



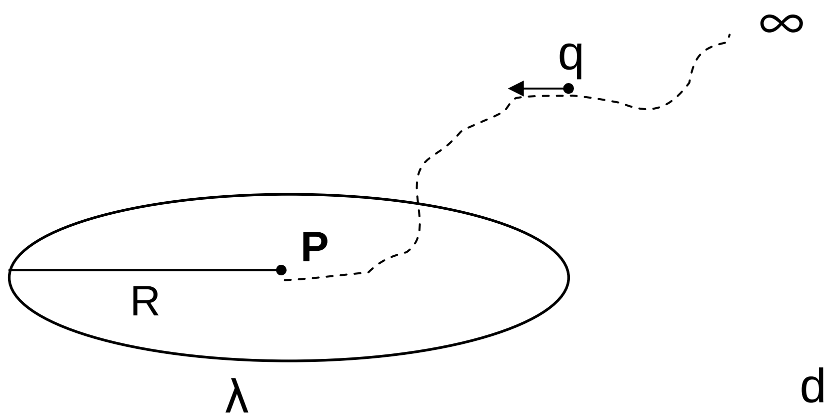
$$\delta E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\delta x}{(L\lambda d - x)^2}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{\delta x}{(L+d-x)^2} \qquad E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{-\delta(L+d-x)}{(L+d-x)^2}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(L+d-x)}\right]_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{L}{d(d+L)}$$

Data una distribuzione lineare di carica elettrica in forma circolare di raggio ***R***, ed avente densità lineare $\boldsymbol{\lambda}$ uniforme, calcolare il lavoro necessario per trasportare una carica puntiforme $\boldsymbol{q}$ dall'infinito al centro della distribuzione stessa



$$L_{\infty P} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_{est} \cdot \delta\vec{l}$$

$$\vec{F}_{est} = -q\vec{E}$$

dove $\vec{E}$ è il campo elettrico generato dall'anello carico

$$L_{\infty P} = -q\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot \delta\vec{l} = -q(V_{\infty} - V_P) = qV_P \qquad V_{\infty} = 0 \qquad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + V_{\infty}$$

$$V_P = \int_{anello} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\delta l}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}2\pi R = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \qquad L_{\infty P} = \frac{q\lambda}{2\varepsilon_0}$$