Fisica A

Prof. Piccinini

Esercitazioni

Dott. Gianluca Pagnoni

E-mail: gianluca.pagnoni3@unibo.it

http://ishtar.df.unibo.it/

4. Un sistema è composto da due molle agganciate, di costanti elastiche k_1 e k_2. Le molle vengono tirate agli estremi in modo da allungare complessivamente il sistema di una quantità Δl. Calcolare:
   a) L'allungamento di ogni singola molla.
   b) Il lavoro che è stato fatto per allungare il sistema.
   c) Le forze esercitate dalle mani che tengono il sistema allungato della quantità Δl.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2 \\ \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta l \end{array}\right\} \quad \Delta x_i = \dfrac{k_j}{k_1 + k_2} \Delta l \\ L = \dfrac{1}{2} k_1 (\Delta x_1)^2 + \dfrac{1}{2} k_2 (\Delta x_2)^2 \end{array}\right\} \quad L = \frac{1}{2} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (\Delta l)^2$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$F_i = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 = \left(k_1 \frac{k_2}{k_1 + k_2} + k_2 \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) \Delta l = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \Delta l$$

1. Una molla di costante elastica k_1 viene agganciata ad una parete. Esercitando su di essa una forza F la molla si allunga di $l_1 = 1\ cm$. La stessa molla è poi agganciata a un'altra molla di costante elastica k_2, la quale viene a sua volta fissata alla parete. Applicando la stessa forza F alla prima molla, la seconda si tende di $l_2 = 0.5\ cm$. Dire quali delle seguenti affermazioni (riguardanti il secondo caso) sono vere, e motivare le risposte:

   a) Se $k_2 = k_1$ allora anche la prima molla si tende di $0.5\ cm$.
   b) La prima molla si tende di $1\ cm$, come quando è sola, e $k_2 = 2k_1$
   c) L'energia potenziale accumulata dalle due molle è uguale a quella accumulata dalla prima molla nel primo caso.
   d) Nel secondo caso l'energia potenziale accumulata è la metà rispetto al primo caso.
   e) Nel secondo caso l'energia potenziale accumulata è una volta e mezzo quella del primo caso.
   f) Nel secondo caso l'energia potenziale accumulata è doppia rispetto al primo caso.

Momento di inerzia

$$I_O = \int r^2 dm$$

Nel caso continuo

$$I_O = \sum_i r_i^{\,2} m_i$$

Nel caso discreto

Il momento di inerzia è legato a come è distribuita la massa attorno all’asse di rotazione

5. Una lastra rettangolare uniforme ha massa m e lati di lunghezza a e b.

a. Calcolare il suo momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare alla lastra stessa e passante per un suo vertice.

Considero una sbarra infinitesima e calcolo il momento di inerzia con il teorema di Huyghens-Steiner:

$$dI = \frac{1}{12} dm\, a^2 + dm\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2\right]$$

dove

$$dm = \frac{m}{b} dx$$

$$dI = \left\{\frac{1}{3} a^2 + x^2\right\} \frac{m}{b} dx$$

integro

$$I = \int_0^b \left\{\frac{1}{3} a^2 + x^2\right\} \frac{m}{b} dx =$$

$$I = \frac{1}{3} m\left(a^2 + b^2\right)$$

5. Una lastra rettangolare uniforme ha massa m e lati di lunghezza a e b.

b. Calcolare il momento d'inerzia della lastra rispetto a un asse perpendicolare ad essa e passante per il centro di massa.

Uso sempre il teorema di Huyghens-Steiner e scrivo:

$$I_{CM} = I - md^2$$

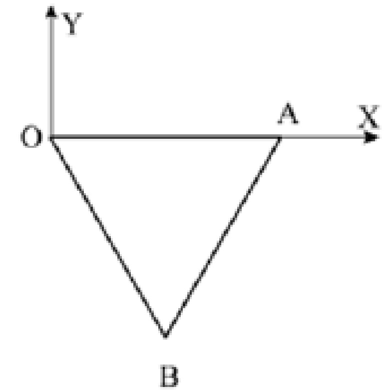
dove

$$I = \frac{1}{3} m\left(a^2 + b^2\right)$$

$$d^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$$

6. Il corpo solido in figura, a forma di triangolo equilatero di massa totale $M = 1\ kg$, è costituito da tre barrette omogenee di lunghezza $L = 1\ m$ ciascuna, saldate agli estremi. Il triangolo può muoversi nel piano verticale, soggetto alla forza peso, intorno all'asse orizzontale OZ passante per O.



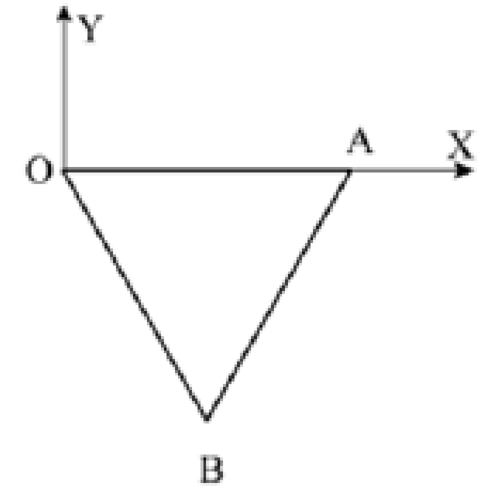
Se il corpo viene rilasciato dalla posizione iniziale rappresentata in figura, calcolare:

a) La posizione del centro di massa quando il corpo si trova nella posizione iniziale.

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$x_G = \frac{L}{2} = 0.5m; \qquad y_G = -\frac{\sqrt{3}}{6} L \sim 0.29m$$

b) Il momento d'inerzia del triangolo rispetto all'asse OZ.



$$I_O = \int r^2 dm$$ per OA e OB

per AB usiamo il teorema di Huyghens-Steiner

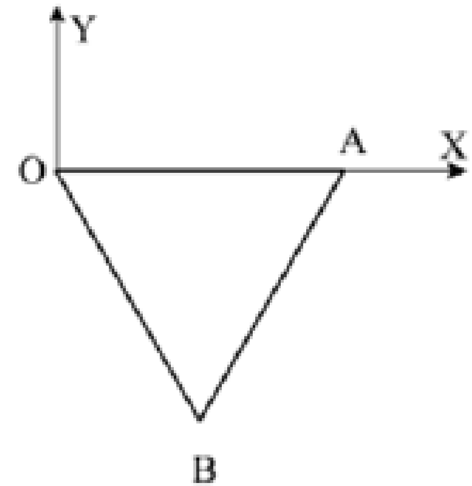
$$I_O = m\mathbf{r}_{CM}{}^2 + I_{CM}$$

$$I_{OA} = \frac{1}{3}\frac{M}{3}L^2; \quad I_{OB} = \frac{1}{3}\frac{M}{3}L^2;$$

$$I_{AB} = \frac{1}{12}\frac{M}{3}L^2 + \frac{M}{3}\left(L^2 - \frac{L^2}{4}\right) = \frac{10}{36}ML^2$$

$$\Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{2}ML^2 = 0.5kg \cdot m^2$$

c) la velocità angolare ω massima; l'accelerazione angolare α e le componenti della forza vincolare R_x ed R_y corrispondenti a tale velocità angolare massima.



Considero le energie del sistema:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_z \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$E_{pot} = Mgh = U_f - U_i = Mg\left(y_f - y_i\right)$$

y_f posizione di minimo potenziale: $y_f = OG$

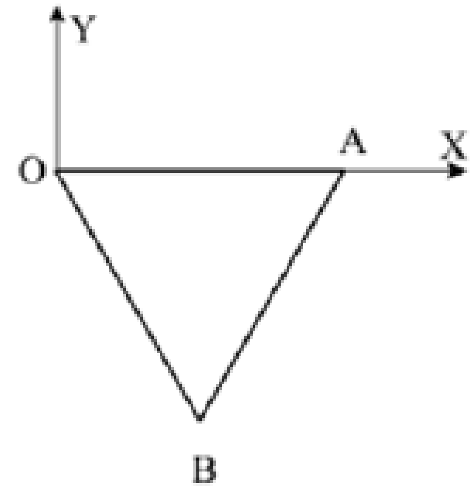
$$\frac{1}{2} I_z \omega^2 = Mgh$$

$$\frac{1}{2} L\omega^2 = g\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{L}} = 3.36\ s^{-1}$$

$$h = y_G^i - y_G^f = \frac{\sqrt{3}}{6} L$$

c) la velocità angolare ω massima; l'accelerazione angolare α e le componenti della forza vincolare R_x ed R_y corrispondenti a tale velocità angolare massima.



$$R_x = 0N;$$

$$R_y - Mg = M\frac{v_G^2}{\overline{OG}} = M\omega^2\overline{OG};$$

$$R_y = Mg + M\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{g}{L}\frac{\sqrt{3}}{3}L;$$

$$R_y = \frac{5}{3}Mg = 16.33N$$

4. Un astronauta, appena atterrato su un piccolo pianeta sferico privo di atmosfera, cammina in linea retta lungo un meridiano per una distanza $L = 35\ km$ prima di ritrovarsi al punto di partenza. Osserva inoltre che lasciando cadere un martello da una altezza $h = 1.5\ m$ esso impiega un tempo $t = 22\ s$ per arrivare al suolo.
Si determinino:

a) il valore della accelerazione di gravità sul pianeta;

$$g = \frac{2h}{t^2} = 6.2 \times 10^{-3}\ m/s^2$$

b) la massa del pianeta.

$$R = \frac{L}{2\pi}$$

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} \ \Rightarrow \ M = \frac{gR^2}{\gamma} = \frac{gL^2}{4\pi^2\gamma} = 2.9 \times 10^{15}\ kg$$

4. Una slitta di massa m = 8,0 kg è inizialmente in quiete su una strada orizzontale, caratterizzata da un attrito dinamico con coefficiente μ = 0,40. La slitta è trainata per un tratto l = 3,0 m da una forza costante F = 40 N, la quale forma un angolo di 30° rispetto al piano orizzontale.

a. Quanto vale il lavoro fatto dalla forza applicata?

$$L_F = \vec{F} \cdot \vec{l} = Fl\cos 30^o = 40 \times 3,0 \times \sqrt{3}/2 = 103,92J$$

b. Calcolare l'energia dissipata per attrito.

$$L_{attr} = \vec{F}_{attr} \cdot \vec{l}$$

$$F_{attr} = \mu N = \mu mg - F\sin 30°$$

$$= -0,4 \times (8,0 \times 9,8 - 40 \times 0,5) \times 3,0 = -70,08J$$

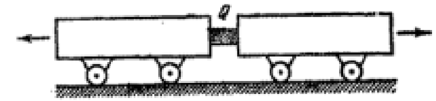
c. Di quanto cambia l'energia cinetica della slitta?

$$L = \Delta T = \frac{1}{2}mv^2 = 103,92 - 70,08 = 33,84J$$

4. Una slitta di massa m = 8,0 kg è inizialmente in quiete su una strada orizzontale, caratterizzata da un attrito dinamico con coefficiente $\mu = 0{,}40$. La slitta è trainata per un tratto $l = 3{,}0\ m$ da una forza costante $F = 40\ N$, la quale forma un angolo di 30° rispetto al piano orizzontale.

d. Qual è la velocità della slitta dopo aver percorso i tre metri?

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\frac{\Delta T}{m}} = \sqrt{2\frac{33,84}{8,0}} = 2,91 m/s$$



5. Due carrelli, uno di massa $m_1 = 100\ g$ e l'altro di massa $m_2 = 300\ g$, sono inizialmente vincolati l'un l'altro (vedi figura), e le loro ruote sono bloccate. A un certo istante si fa esplodere una carica posta fra loro, in modo che i carrelli si allontanano lungo una direzione rettilinea, strisciando sui binari con attrito radente caratterizzato dal coefficiente μ. La carica trasferisce ai carrelli un'energia $E = 1.35\ J$. Il primo carrello si ferma dopo aver percorso una distanza $l = 18\ m$.

a) Quale distanza percorre il secondo carrello?

b) Qual è la velocità dei due carrelli subito dopo l'esplosione?

c) Quanto vale il coefficiente μ ?

d) Qual è la velocità del centro di massa del sistema dopo l'esplosione?

a) Quale distanza percorre il secondo carrello?

Un'esplosione non e' altri che un sistema di particelle che prima era tenuto insieme da forze interne e poi, sempre da forze interne al sistema, viene disintegrato. Valgono quindi tutte le considerazioni per gli urti anelastici. Se all'istante iniziale la particella e' ferma la sua quantita' di moto e' nulla. Per la legge di conservazione della quantita' di moto anche dopo l'esplosione il sistema avra' quantita' di moto nulla. Possiamo quindi scrivere:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = 3$$

Confronto l'energia cinetica con il lavoro compiuto dalla forza di attrito radente per fermare le particelle

$$\frac{1}{2} m v^2 = F_{attr} \cdot l \qquad\qquad F_{attr} = \mu N = \mu m g$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \mu m g l$$

a) Quale distanza percorre il secondo carrello?

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\cancel{m_1}v_1^2 = \mu\,\cancel{m_1}\,gl \\ \frac{1}{2}\cancel{m_2}v_2^2 = \mu\,\cancel{m_2}\,gl_x \end{aligned}\right\} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{l}{l_x} \quad \Rightarrow \quad l_x = \frac{l}{9} = 2m$$

b) Qual è la velocità dei due carrelli subito dopo l'esplosione?

In questo processo l'energia di disintegrazione e' definita come la somma delle energie cinetiche dei due corpi dopo l'esplosione:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 2m_2v_2^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_2 = \sqrt{\dfrac{E}{2m_2}} = 1,5\,m/s \\ v_1 = 3v_2 = 4,5\,m/s \end{cases}$$

c) Quanto vale il coefficiente μ ?

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgl$$

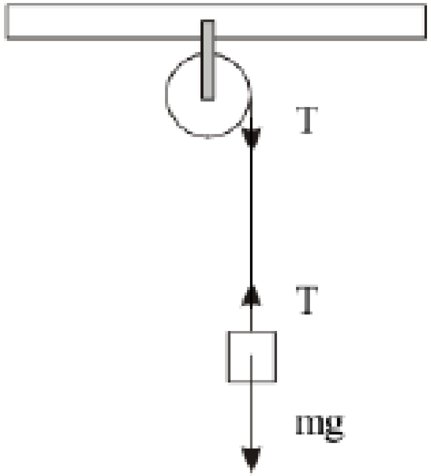
$$\frac{1}{2}\cancel{m_1}v_1^2 = \mu\,\cancel{m_1}\,gl \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{v_1^2}{2gl} = 0,057$$

d) Qual è la velocità del centro di massa del sistema dopo l'esplosione?

$$v_{CM} = 0$$

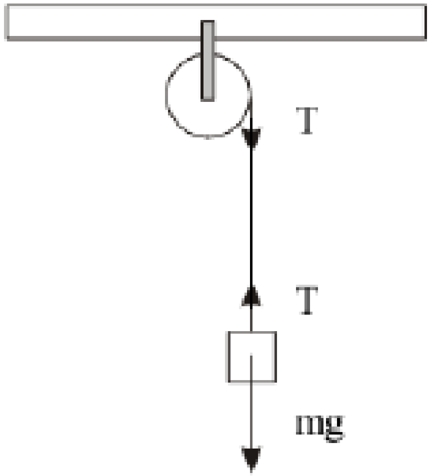
5. Un corpo di massa m è appeso a una corda di massa trascurabile avvolta intorno ad una ruota fissata al soffitto. La ruota, di massa $M = 2m$ e raggio R, gira senza attrito. La fune non scivola sulla carrucola. La massa è inizialmente immobile a un'altezza h rispetto al pavimento, con la fune, lunga $l < h$, totalmente avvolta alla carrucola. Calcolare:
   a. L'accelerazione del corpo mentre la corda si srotola.

$$\left.\begin{aligned} &P - T = ma \\ &TR = I\dot{\omega} = I\frac{a}{R} \\ &I = \frac{1}{2}MR^2 = mR^2 \end{aligned}\right\} mg - I\frac{a}{R^2} = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}g$$



b. La velocità con la quale arriva al suolo dopo che la fune si è totalmente srotolata.

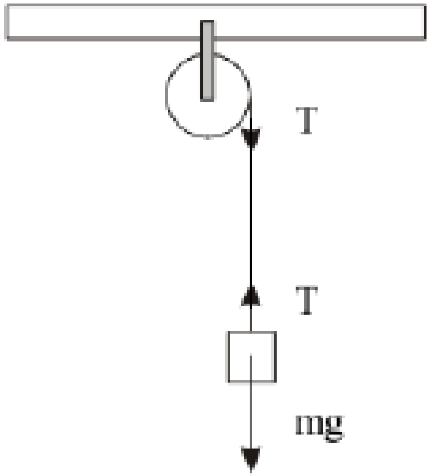
$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2} g t_1 \\ l = \frac{1}{4} g t_1^2 \\ mg\left(h-l\right)+\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt{gl} \\ v_S = \sqrt{g\left(2h-l\right)} \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} mgh = mg\left(h-l\right)+\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I\omega_1^2 \\ mg\left(h-l\right)+\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt{gl} \\ v_S = \sqrt{g\left(2h-l\right)} \end{cases}$$

c. L'altezza massima che raggiunge dopo aver colpito il suolo con urto elastico.

$$\frac{1}{2}mv_S^2 = mgh_M \quad \Rightarrow \quad h_M = h - \frac{l}{2}$$



6. Una sbarra sottile di lunghezza L si trova sull'asse x, con un'estremità nell'origine e l'altra, ovviamente, nel punto $x = L$. La sbarra non è omogenea, ma è caratterizzata da una densità lineare di massa $\lambda = Cx$, dove C è una costante.
   a. Esprimere la massa totale della sbarra in funzione di C ed L.

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L Cx dx = \frac{1}{2} CL^2$$

   b. Determinare il campo gravitazionale generato dalla sbarra, in un punto dell'asse x di coordinata $x_0 > L$.

$$\left.\begin{array}{l} G = \int_0^L \gamma \frac{dm}{(x_0 - x)^2} = \gamma C \int_0^L \frac{x dx}{(x_0 - x)^2} \\ y = x_0 - x; \qquad dy = -dx \end{array}\right\} G = -\gamma C \int_{x_0}^{x_0 - L} \frac{(x_0 - y)\, dy}{y^2}$$

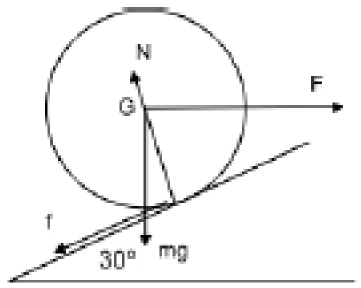
$$G = -\gamma C \left(x_0 \int_{x_0}^{x_0 - L} \frac{dy}{y^2} - \int_{x_0}^{x_0 - L} \frac{dy}{y} \right) = -\gamma C \left(x_0 \left. \frac{1}{y} \right|_{x_0 - L}^{x_0} - \ln y \Big|_{x_0}^{x_0 - L} \right) = -\gamma C \left[x_0 \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 - L} \right) + \ln \frac{x_0}{x_0 - L} \right]$$

$$G = \gamma C \left[\frac{L}{x_0 - L} - \ln \frac{x_0}{x_0 - L} \right] \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = -2\gamma \frac{M}{L^2} \left[\frac{L}{x_0 - L} - \ln \frac{x_0}{x_0 - L} \right] \hat{i}$$

c. Determinare il campo gravitazionale generato dalla sbarra, in un punto dell'asse x di coordinata $x_0 < 0$.

$$G = \int_0^L \gamma \frac{dm}{(x_0 - x)^2} = \gamma C \int_0^L \frac{x dx}{(x_0 - x)^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = 2\gamma \frac{M}{L^2}\left[\frac{L}{x_0 - L} - \ln \frac{x_0}{x_0 - L}\right]\hat{i}$$

6. Un disco di massa m = 10 kg e raggio R = 1 m sale rotolando senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α = 30° rispetto all'orizzontale, trainato da una forza orizzontale costante di modulo F = 100 N, applicata al suo centro. Si calcoli:
   a. L'accelerazione del centro del disco.
   b. Il modulo della forza vincolare f responsabile del rotolamento.
   c. Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di contatto con il piano inclinato.



$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}_{cm}$$

$$fR = I_G\dot{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\frac{a_{cm}}{R} = \frac{1}{2}mRa_{cm}$$

$$\left.\begin{aligned} &F\cos\alpha - mg\sin\alpha - f = ma_{cm} \\ &f = \frac{1}{2}ma_{cm} = 12.53N \end{aligned}\right\} a_{cm} = \frac{2}{3}\left(\frac{F}{m}\cos\alpha - g\sin\alpha\right) = 2{,}51ms^{-2}$$

$$I = I_G + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 = 15kg\,m^2$$

5. Un pianeta sferico di raggio $R = 3500\ km$ ha una densità costante $\rho = 4.0 \times 10^3\ kg/m^3$. Determinare:

a) il peso di una persona che ha un peso $P = 672\ N$ sulla terra;

b) l'altezza massima h raggiunta da un oggetto lanciato verso l'alto con velocità $v = 2\ m/s$ dalla superficie;

c) il tempo trascorso dall'istante in cui lascia il terreno a quello in cui vi ritorna.

$$m_{persona} = \frac{P}{g} = \frac{672}{9.80} = 68.6\ kg \qquad M_{pianeta} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow$$

$$g_{pianeta} = \gamma \frac{M}{R^2} = \gamma\rho \frac{4}{3}\pi R = 6.67\times10^{-11} \cdot 4\times10^3 \frac{4}{3}\pi\, 3.5\times10^6 = 3.91\ m/s^2$$

$$P' = m_{persona}\ g_{pianeta} = 68.57 \cdot 3.91 = 268\ N \qquad h = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{4}{3.91} = 0.51\ m$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + vt = 0 \Rightarrow t_1 = 0; \quad t_2 = 2\ \frac{v}{g} = 2\ \frac{2}{3.91} = 1.02\ s$$