

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-a-

1. Calcolare l'area del parallelogramma individuato dai seguenti vettori:

$$\vec{v}_1 = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

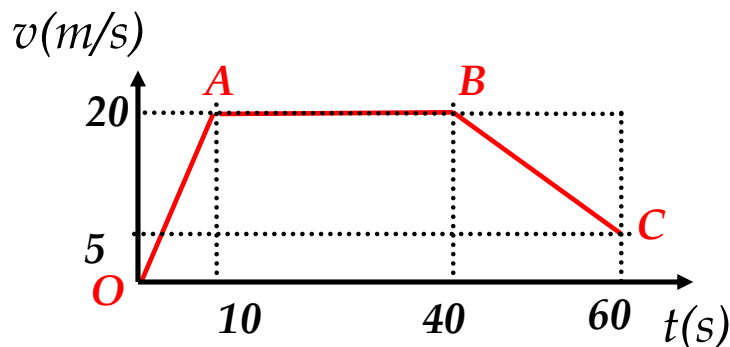
$$\vec{v}_2 = -\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \hat{i}(-3+4) - \hat{j}(9+2) + \hat{k}(-6-1) = \hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{(1)^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+121+49} = \sqrt{171}$$

Calcolare il modulo del prodotto vettoriale:  $2\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$   $2(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 2\sqrt{171}$

2. Un corpo partendo da fermo accelera per un  $\Delta t = 10$  s fino ad una velocità di 20 m/s, successivamente si muove con velocità costante per 30 s, quindi rallenta fino a raggiungere la velocità di  $v = 5$  m/s dopo 1 minuto dalla partenza. Quanto spazio ha percorso dopo 1 minuto? Qual è stata la velocità media?



$$a_{OA} = \frac{v_A - v_O}{t_A - t_O} = \frac{20}{10} = 2 \text{ m/s}^2, s_{OA} = v_{OA}t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 \cdot (10) + \frac{1}{2} \cdot 2(10)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2(10)^2 = 100 \text{ m}$$

$$a_{AB} = 0, v_{AB} = 20 \text{ m/s}, s_{AB} = v_{AB}t = 20 \cdot 30 = 600 \text{ m}$$

$$a_{BC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{5 - 20}{60 - 40} = \frac{-15}{20} = -\frac{3}{4} \text{ m/s}^2, v_B = 0.75 \text{ m/s}, s_{BC} = v_B t + \frac{1}{2}at^2 =$$

$$= 20 \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (20)^2 = 400 - 150 = 250 \text{ m}$$

$$s_{tot} = s_{OA} + s_{AB} + s_{BC} = 100 + 600 + 250 = 950 \text{ m}$$

$$v_{media} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{950}{60} = 15,8\bar{3} \text{ m/s}$$

3. Un fucile è puntato orizzontalmente contro un bersaglio alla distanza di 30m. Il proiettile colpisce 1.9 cm sotto il centro. Qual è il tempo di volo e la velocità del proiettile?

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2 \cdot 1,9 \cdot 10^{-2}}{9,8} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \Rightarrow t = 0,06 \text{ s}, s = vt \Rightarrow v = \frac{s}{t} = \frac{30}{0,06} = 500 \text{ m/s}$$

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-a-

4. Una massa di 5 kg scende senza attrito da un piano inclinato alto 50cm e lungo 4m. Con quale velocità finale arriva fino a quota zero?

$$P \sin \alpha = ma \Rightarrow mg \sin \alpha = ma \Rightarrow a = g \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{0.5}{4} = 0.125; a = g \sin \alpha = 1.23 \text{ m/s}^2; v = at; s = \frac{1}{2} at^2$$

$$t^2 = \frac{2s}{a} = \frac{2s}{g \sin \alpha} = \frac{2 \cdot 50}{1.23} = 81 \text{ s}^2 \Rightarrow t = 9 \text{ s}$$

$$v = 1.23 \cdot 9 = 11.07 \text{ m/s}$$

5. Una mela di 150 g cade da un ramo alto 250 cm. Quanto lavoro compie la forza-peso sulla mela?

$$L = \vec{P} \cdot \vec{s} = |P| \cdot |s| \cdot \cos \alpha$$

$$|P| = mg, g = 9.8 \text{ m/s}^2, m = 150 \text{ g} = 0.15 \text{ kg} \Rightarrow F = 9.8 \cdot 0.15 = 1.5 \text{ N}$$

$$|s| = 250 \text{ cm} = 2.5 \text{ m}, \alpha = 0$$

$$L = 1.5 \cdot 2.5 = 3.8 \text{ J}$$

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-b-

1. Dato il vettore  $\vec{v}_1 = 3\hat{i} - 3\hat{j}$ , trovare un vettore perpendicolare tale per cui il modulo della somma vettoriale è uguale a 5.

$$\vec{v}_1 = 3\hat{i} - 3\hat{j}, \vec{v}_2 = a\hat{i} + b\hat{j} \text{ vettore generico}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{vettori perpendicolari} \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ |\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = 5 \end{array} \right\}$$

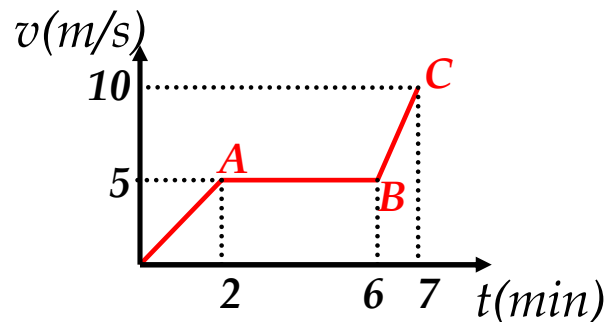
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3a) - 3b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$|\vec{v}_1 + \vec{v}_2| = |(3+a)\hat{i} + (-3-a)\hat{j}| = \sqrt{(3+a)^2 + (-3-a)^2} = \sqrt{9+6a+a^2+9-6a+a^2} = \sqrt{18+2a^2} = 5$$

$$18 + 2a^2 = 25 \Rightarrow 2a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{7}{2}\hat{i} + \frac{7}{2}\hat{j}$$

2. Dato il seguente diagramma velocità-tempo. Determinare la velocità media e lo spazio percorso.



$$a_{OA} = \frac{v_A - v_O}{t_A - t_O} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ m/s}^2, s_{OA} = s_O + v_{OA}t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 \cdot (2) + \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot (2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot 4 = 5 \text{ m}$$

$$a_{AB} = 0, v_{AB} = 5 \text{ m/s}, s_{AB} = v_{AB}t = 5 \cdot 4 = 20 \text{ m}$$

$$a_{BC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{10 - 5}{7 - 6} = 5 \text{ m/s}^2, v_B = 5 \text{ m/s}, s_{BC} = v_B t + \frac{1}{2}at^2 = 5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (1)^2 = 5 + \frac{5}{2} = 7.5 \text{ m}$$

$$s_{tot} = s_{OA} + s_{AB} + s_{BC} = 5 + 20 + 7.5 = 32.5 \text{ m}$$

$$v_{media} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{32.5}{7} = 4.64 \text{ m/s}$$

3. Un sasso è lanciato a  $30^\circ$  rispetto all'orizzontale, con velocità iniziale  $v_0 = 20$  m/s. A che distanza cade? Dopo quanto tempo?

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-b-

$$\begin{aligned}\alpha &= 30^\circ, v_{0x} = v_0 \cos \alpha, v_{0y} = v_0 \sin \alpha \\ y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t \left( v_{0y} - \frac{1}{2}gt \right) = 0 \\ v_{0y} - \frac{1}{2}gt &= 0 \Rightarrow t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 20}{9.8} \cdot \frac{1}{2} = 2s \\ x &= v_{0x}t = (v_0 \sin \alpha) \cdot t = (v_0 \sin \alpha) \frac{2v_0 \cos \alpha}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha = \frac{2 \cdot 400}{9.8} \frac{\sqrt{3}}{4} = 35.3m\end{aligned}$$

4. Una carrucola senza attrito e senza massa tiene da una parte una massa di 5 kg e dall'altra una di 200 g. Calcolare l'accelerazione totale del sistema.

$$\begin{aligned}\text{Pendolo di Atwood} &\Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \\ \left. \begin{aligned} T - m_1g &= m_1\vec{a}_1 \\ T - m_2g &= m_2\vec{a}_2 \\ a_1 &= -a_2 \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} T - m_1g &= m_1\vec{a}_1 \\ T - m_2g &= -m_2\vec{a}_1 \end{aligned} \right\} |a| = g \left| \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right| \\ |a| &= 9.8 \left| \frac{5 - 0.2}{5 + 0.2} \right| = 9.8 \frac{4.8}{5} = 9.4 m/s^2\end{aligned}$$

5. Un flacone di detersivo scivola dal bordo di una vasca da bagno con velocità iniziale di 1,1 m/s fino a raggiungere il fondo della vasca, scelto come livello di zero, a una velocità di 3,1 m/s. Calcolare il lavoro totale?

$$\begin{aligned}\text{Th. dell'energia cinetica} &\Rightarrow L = \Delta K = K_2 - K_1 \\ \left. \begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\ K_1 &= \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \text{massa incognita} \end{aligned} \right\} L &= K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(9.61 - 1.21) = \frac{1}{2}m \cdot 8.4 = (4.2m)J\end{aligned}$$

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-c-

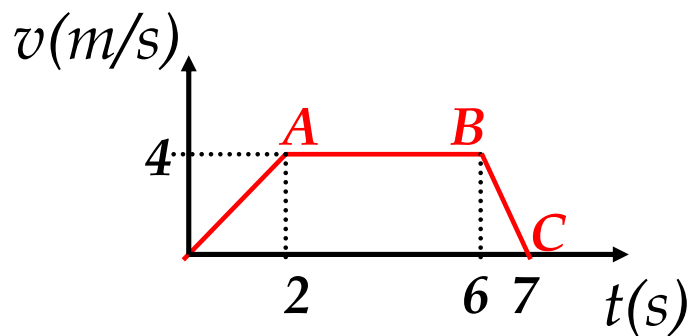
1. Dati i vettori  $\vec{v}_1 = (4;6;1)$  e  $\vec{v}_2 = (-3;2;3)$ , calcolare il prodotto scalare e il prodotto vettoriale.

$$\vec{v}_1 = (4;6;1), \vec{v}_2 = (-3;2;3)$$

$$\text{Prodotto scalare: } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = -12 + 12 + 3 = 3$$

$$\text{Prodotto vettoriale: } \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \hat{i}[6 \cdot 3 - 1 \cdot 2] + \hat{j}[4 \cdot 3 - 1 \cdot (-3)] + \hat{k}[4 \cdot 2 - 6 \cdot (-3)] = \\ = 16\hat{i} - 15\hat{j} + 26\hat{k}$$

2. Dato il seguente diagramma velocità-tempo. Determinare la velocità media e lo spazio percorso.



$$a_{OA} = \frac{v_A - v_O}{t_A - t_O} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}^2, s_{OA} = s_O + v_{OA}t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 \cdot (2) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \text{ m}$$

$$a_{AB} = 0, v_{AB} = 4 \text{ m/s}, s_{AB} = v_{AB}t = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m}$$

$$a_{BC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{0 - 4}{7 - 6} = -4 \text{ m/s}^2, v_B = 4 \text{ m/s}, s_{BC} = v_B t + \frac{1}{2}at^2 = 4 \cdot 1 + \frac{1}{2}(-4)(1)^2 = 4 - 2 = 2 \text{ m}$$

$$s_{tot} = s_{OA} + s_{AB} + s_{BC} = 4 + 16 + 2 = 22 \text{ m}$$

$$v_{media} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{22}{7} = 3,14 \text{ m/s}$$

3. Un oggetto viene lanciato su una rampa inclinata di  $45^\circ$  con una velocità iniziale di 30 m/s. Dopo quanto tempo si ferma? A che altezza dal suolo arriva?

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-c-

$$\alpha = 45^\circ, v_{0x} = v_0 \cos \alpha, v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 30 \cdot \sqrt{2}}{9.8} = 4.33s$$

$$v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow 0 = v_{0y} - gt \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g} \Rightarrow y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} = 23m$$

4. Un'auto percorre una curva di raggio 50m alla velocità di 72 km/h. Calcolare modulo e direzione dell'accelerazione.

$$v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(20)^2}{50} = 8 \text{ m/s}^2 \text{ la direzione è verso il centro}$$

5. David si lancia con il parapendio da una rupe, la sua massa complessiva (compresa l'attrezzatura) è pari a 90 kg. Nel momento in cui sta per atterrare la sua velocità è di 5,0 m/s. Qual è il lavoro fatto da tutte le forze?

$$\text{Th. dell'energia cinetica} \Rightarrow L = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$\left. \begin{array}{l} K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \\ K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \end{array} \right\} L = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(25 - 0) = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 25 = 1125 \text{ J}$$

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-d-

- Un'automobile si sposta prima di 40 km verso est, poi di 30 km verso nord ed infine di 20 km verso N-E con un angolo di  $45^\circ$ . Determinare lo spostamento risultante e lo spostamento verso Est.

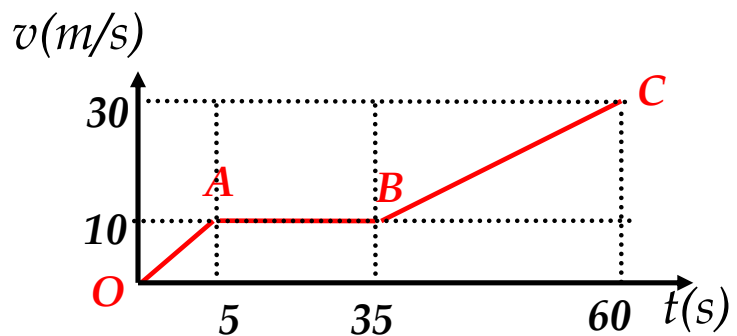
Considera mo le componenti dgli spostamenti i :

$$\left. \begin{array}{l} 1: (40, 0) \\ 2: (0, 30) \\ 3: \left( 20 \frac{\sqrt{2}}{2}, 20 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{array} \right\} \text{vettore spostamento: } \left( 40 + 20 \frac{\sqrt{2}}{2}, 30 + 20 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{spostamento risultante} = \sqrt{(40 + 10\sqrt{2})^2 + (30 + 10\sqrt{2})^2} = 70 \text{ km}$$

$$\text{spostamento verso Est} = 10(4 + \sqrt{2}) = 54 \text{ km}$$

- Una macchina parte da ferma ed accelera con accelerazione costante pari a  $2 \text{ m/s}^2$  per cinque secondi. Nei successivi  $30 \text{ s}$ , essa si muove di moto uniforme, infine la sua velocità aumenta linearmente arrivando ad una velocità massima di  $30 \text{ m/s}$  dopo 1 minuto dalla partenza. Quanto spazio percorre? Qual è la sua velocità media?



$$a_{OA} = 2 \text{ m/s}^2, s_{OA} = v_{OA}t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 \cdot (10) + \frac{1}{2} \cdot 2(5)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2(5)^2 = 25 \text{ m}$$

$$a_{AB} = 0, v_{AB} = a_{OA} \cdot t_{OA} = 10 \text{ m/s}, s_{AB} = v_{AB}t = 10 \cdot 30 = 300 \text{ m}$$

$$a_{BC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{30 - 10}{60 - 35} = \frac{20}{25} = 0.8 \text{ m/s}^2, v_B = 10 \text{ m/s}, s_{BC} = v_B t + \frac{1}{2} a t^2 = 10 \cdot (25) + \frac{1}{2} \cdot 0.8(25)^2 = 250 + 250 = 500 \text{ m}$$

$$s_{tot} = s_{OA} + s_{AB} + s_{BC} = 25 + 300 + 500 = 825 \text{ m}, v_{media} = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{825}{60} = 13.75 \text{ m/s}$$

## Esame di allineamento di Fisica - 24 novembre 2011

2° Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna, sede di Cesena

-d-

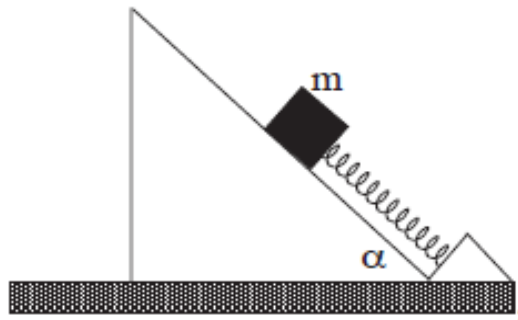
3. Una pallina cade da un tavolo, alto  $h=75$  cm, ad una distanza  $d=90$  cm dal bordo. Che velocità possedeva prima di cadere?

$$h = 75\text{cm} = 0.75\text{m}, d = 90\text{cm} = 0.9\text{m}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2 \cdot 0.75}{9.8} = 0.15\text{s}^2 \Rightarrow t = 0.39\text{s}$$

$$s = vt \Rightarrow v = \frac{s}{t} = \frac{0.9}{0.39} = 2.3\text{m/s}$$

4. Un corpo di massa  $m=10$  kg si trova su un piano inclinato di  $\alpha=60^\circ$  rispetto a terra ed è appoggiato ad una molla di costante  $k=30$  N/m che agisce nella direzione di tale piano. Calcolare l'accorciamento della molla.



$$\vec{P} + \vec{F}_{molla} + \vec{N} = 0$$

$$N + P \cos \alpha = 0$$

$$P \sin \alpha - kx = 0 \Rightarrow x = \frac{P \sin \alpha}{k} = \frac{10 \cdot 9.8 \sqrt{3}}{30 \cdot 2} = \frac{9.8 \cdot \sqrt{3}}{6} = 2.8\text{m}$$

5. Un'automobile di massa 1200 kg passa da 30 km/h a 100 km/h in 180 s. Qual è il lavoro compiuto dal motore?

$$\text{Th. dell'energia cinetica} \Rightarrow L = \Delta K = K_2 - K_1$$

$$v_1 = 30\text{ km/h} = 8.3\text{ m/s}, v_2 = 100\text{ km/h} = 27.8\text{ m/s}$$

$$\left. \begin{array}{l} K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \\ K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \end{array} \right\} L = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}m(772 - 69) = \frac{1}{2} \cdot 1200 \cdot 703 = 4.2 \cdot 10^5\text{ J}$$