

## Scopo di questa indagine

Questa indagine è mirata a fornire informazioni circa il comportamento di materiali elastici ( come molle elicoidali o elastici). L'idea è di offrire un percorso guidato attraverso semplici moti oscillatori armonici, osservando come la frequenza di oscillazione dipenda dalla scelta dei vari componenti del sistema.

Questo studio viene proposto mediante l'uso di un sistema RTL (acquisizione dati in tempo reale) che si avvale di un sensore di distanza (SONAR)

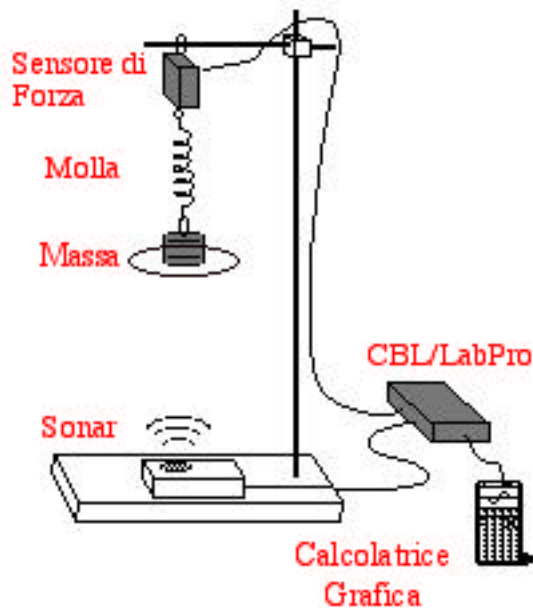
**vedi Help Box nell'ultima pagina: Il Sonar**

Sarai guidato a compiere un esperimento elementare sulle oscillazioni di un corpo appeso ad una molla e ad analizzare i dati sperimentali raccolti.

Ciò fornirà gli elementi e i concetti essenziali riguardo al fenomeno osservato.

## Apparato sperimentale

Per eseguire l'esperienza suggerito è necessario il seguente materiale



**Supporto con gancio**

**Molle ( $0.5 < k < 3$  N/m)**

**Masse (20g to 200g) e piattello porta-masse**

**Sensore di distanza (sonar)**

**Calcolatrice grafica (TI-83 o TI-89 /TI92+/Voyage200)**

**Interfaccia CBL o LabPro**

**Sensore di forza (facoltativo, usato solo in alcuni esperimenti)**



## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

### Osservazioni qualitative

#### *Studio Statico*

**Appendi alla molla una massa , poi appendine un'altra.**

**Cosa cambia?**

**Cosa ti aspetti succeda se aggiungi altre masse?**

**Perché ti aspetti che le cose vadano così?**

**Che cosa accadrebbe se la molla fosse più “rigida”?**

**Quali pensi siano le variabili importanti nella descrizione del fenomeno?**

**Quale grafico pensi sarebbe utile fare per studiare il comportamento della molla?**

**Puoi verificare le tue risposte nelle pagine seguenti.**

#### *Studio Dinamico*

**Appendi alla molla una massa e falla oscillare.**

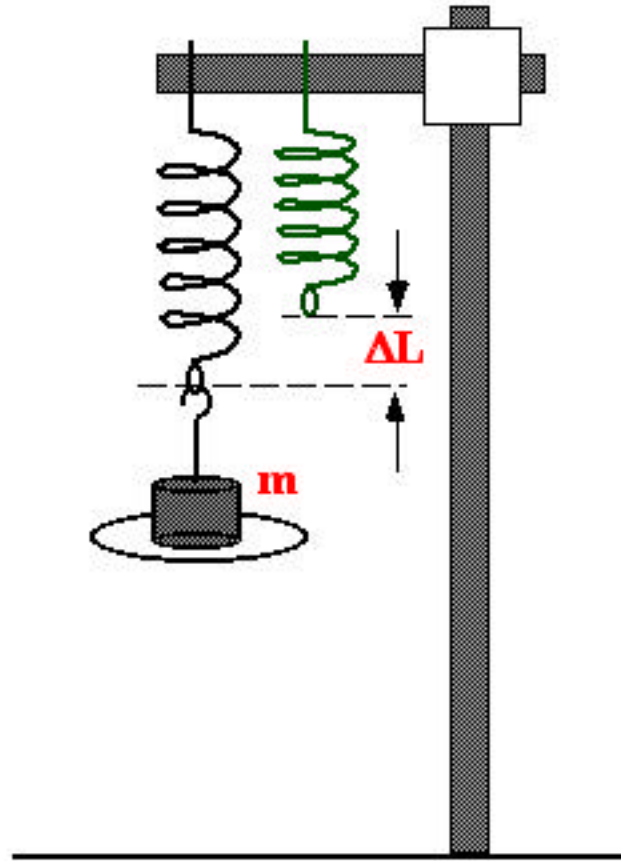
**Il moto risulta “regolare”?**

**Cosa ti sembra restare costante tra una oscillazione e la successiva?**

**Quali variabili graficheresti in funzione del tempo per analizzare meglio queste oscillazioni ?**

**Puoi verificare le tue risposte nelle pagine seguenti.**

## Studio statico



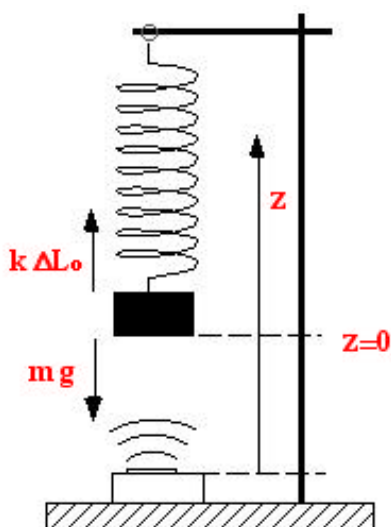
I parametri significativi sono :

- allungamento della molla  $L$
- massa del carico  $m$

Un grafico interessante è quello dell'allungamento della molla in funzione della massa appesa.

## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

# Legge di Hooke



Osserva che masse  $m$  diverse appese alla stessa molla producono diversi allungamenti  $L$ .

Cosa accade quando appendiamo una massa ad una molla? Applichiamo una forza  $F_w = mg$  diretta in basso (il peso della massa).

Quando la massa è in equilibrio la molla deve produrre una forza diretta verso l'alto (detta forza elastica  $F_e$ )

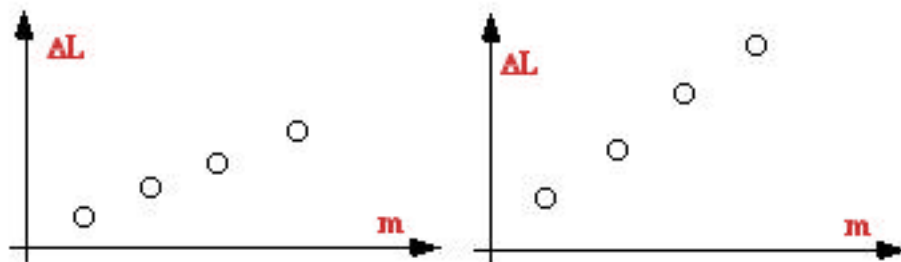
$$F_w = -F_e$$

Studiare la relazione tra  $L$  e  $mg$  equivale a studiare la relazione tra  $L$  e la forza elastica  $F_e$  (con un cambiamento di segno)

Appendiamo una massa  $m$  alla molla, usando un sonar per misurare gli allungamenti  $L$ .

Studieremo la relazione tra  $m$  e  $L$

Ripetendo le misure con diverse masse otteniamo coppie di valori ( $m$ ,  $L$ ) che possono essere riportate su un grafico.

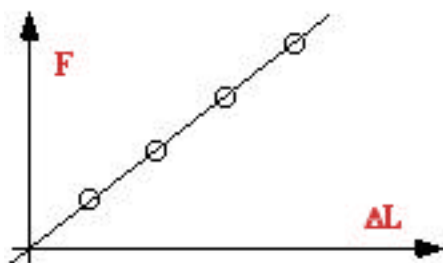


Osserviamo che i punti sperimentali giacciono su una linea retta.

Ripetendo l'esperimento con molle diverse otteniamo grafici simili, ma con diverse pendenze.

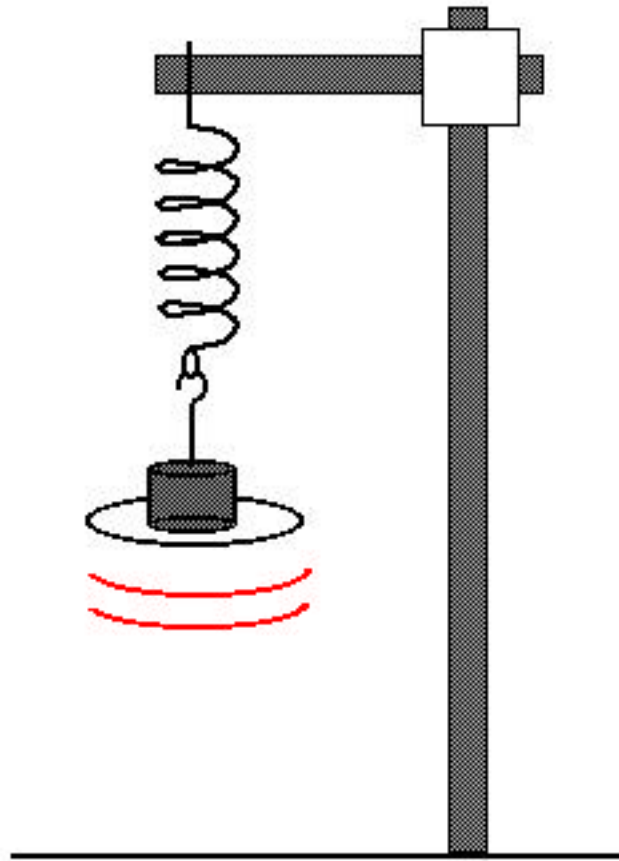
La pendenza della retta interpolante dipende solo dal tipo di molla.

Una molla è normalmente caratterizzata dalla forza necessaria a produrre l'allungamento unitario, un parametro detto "costante elastica"  $k$  della molla. In altri termini:  $k = F / L$ .



## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

### Studio dinamico



**Hai potuto notare le seguenti regolarità?**

- 1. La lunghezza della molla varia tra un minimo e un massimo**
- 2. Il tempo per completare una oscillazione non varia**
- 3. La velocità è massima in mezzo e nulla agli estremi, ove la direzione del moto si inverte**

**Le variabili importanti da studiare in funzione del tempo sono quindi :**

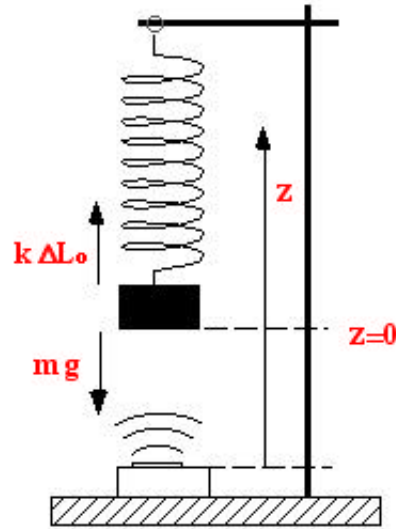
- Spostamento del corpo ( o allungamento della molla)**
- velocità**
- accelerazione**

## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

### Modello teorico

Facciamo alcune previsioni circa le caratteristiche del moto di un corpo di massa  $m$  attaccato ad una molla, con costante elastica  $k$ , appesa ad un supporto fisso.

All'equilibrio il corpo è soggetto a due forze di uguale intensità e direzione opposta: la forza di gravità  $mg$  e la forza di richiamo della molla  $F_o = k L_o$  (ove  $g$  è l'accelerazione di gravità e  $l_o$  la deformazione della molla quando il corpo è in equilibrio, cosicché  $L_o = mg/k$ ).



Quando il corpo oscilla alla generica altezza  $z$  la forza esercitata dalla molla è:

$$F = P + F_{el}$$

L'equazione del moto è descritta dalla legge di Newton :

$$ma = mg - k\Delta L$$

Se scegliamo l'origine del sistema di riferimento nella posizione di equilibrio e poniamo  $L = -L_o + z$ , assumendo che il moto avvenga solo nella direzione  $z$ , l'equazione del moto assume la forma:

$$ma = -mg - k(-L_o + z)$$

Che può essere riscritta in una forma che non dipende dal campo gravitazionale, ricordando che la condizione di equilibrio è  $mg = k L_o$

$$ma = -kz$$

Tale equazione è soddisfatta dalle soluzioni:

$$x = A_o \cos(\omega t + \phi) \quad v = -A_o \omega \sin(\omega t + \phi) \quad a = -A_o \omega^2 \cos(\omega t + \phi),$$

ove:  $\omega = \sqrt{k/m}$  è detta frequenza angolare

$A_o$  è l'ampiezza

$\phi$  è la fase che dipende dalla posizione del corpo all'istante  $t = 0$

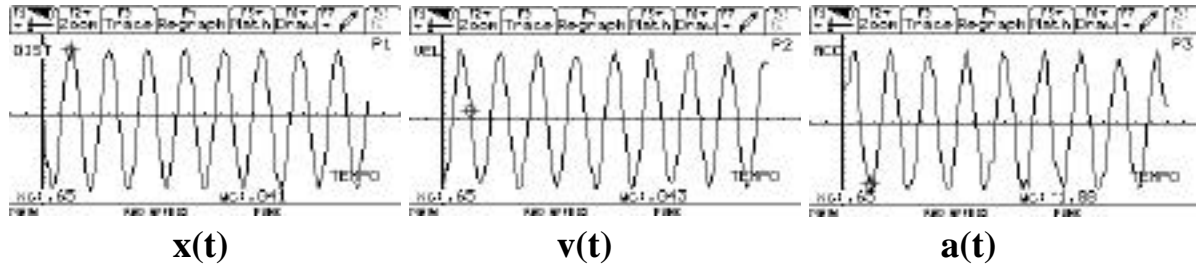
Il moto è quindi periodico ed il periodo (il tempo impiegato da una oscillazione) è:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{m/k}$$

## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

### Prospetto di analisi dei dati

Eseguendo l'esperimento sono stati raccolti i dati relativi alla posizione, velocità e accelerazione del corpo in funzione del tempo



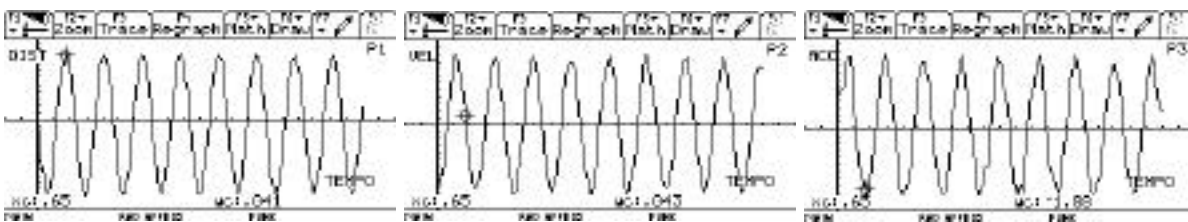
**Dai dati raccolti si possono ricavare molte informazioni.  
Qui sotto è riportata una lista di vari tipi di analisi suggerite.**

- 1. Analisi dei grafici**
- 2. Come misurare il Periodo**
- 3. Accelerazione vs. Spostamento**



## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

### Analisi dei grafici



Alcune domande cui puoi rispondere osservando i grafici ti aiuteranno a riconoscere le principali caratteristiche del fenomeno.

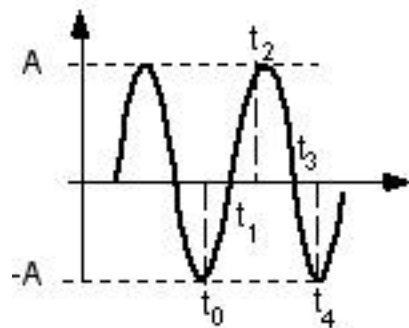
**1. Quanto vale l'ampiezza  $A$  dell'oscillazione (la massima elongazione)?**

Il valore si può leggere come ordinata  $Y$  di un massimo o minimo del grafico, (scorrendo con i tasti cursore)

**2. Dopo quanto tempo (periodo) il moto si ripete ?**

Differenza tra le ascisse  $X$  relative a due massimi o minimi adiacenti

Sia  $t_0$  l'istante in cui  $y = -A$   
 $t_1$  il successivo istante in cui  $y = 0$   
 $t_2$  l'istante in cui  $y = A$   
 $t_3$  l'istante in cui ancora  $y = 0$   
 $t_4$  l'istante in cui ancora  $y = -A$ .



**3. Come varia nel tempo la lunghezza della molla ?**

Si accorcia tra  $t_1$  e  $t_3$  si allunga tra  $t_0$  e  $t_1$  ....

**4. Perché la velocità è positiva nell'intervallo  $(t_0 \rightarrow t_2)$  e negativa nell'intervallo  $(t_2 \rightarrow t_4)$ ?**

E' positiva nell'intervallo  $(t_0 \rightarrow t_2)$  perchè il corpo si allontana dal sonar e noi abbiamo scelto questa direzione come positiva, è negativa nell'intervallo  $(t_2 \rightarrow t_4)$  perchè il corpo si avvicina al sonar.

**5. Quando è massimo il modulo della velocità? E quando è minimo?**

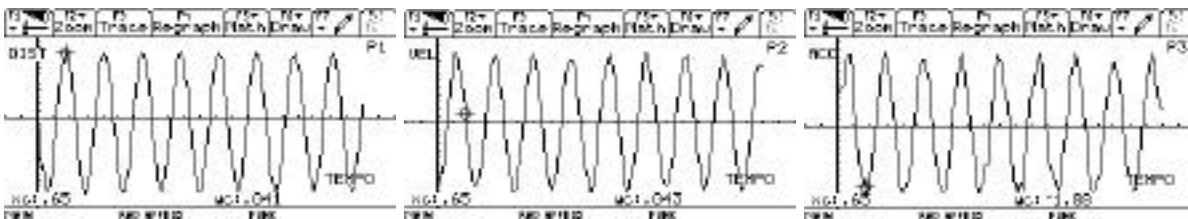
Il modulo della velocità è massimo quando il corpo attraversa la posizione di equilibrio (spostamento nullo). E' minimo (zero) alla massima elongazione (spostamento).

**6. Perché la accelerazione e lo spostamento sono sempre in opposizione di fase?**

Perchè la forza elastica è  $\mathbf{F} = -k \mathbf{x}$ , e quindi  $m \mathbf{a} = -k \mathbf{x}$

## Studio del moto di un corpo appeso ad una molla

### Come misurare il periodo



Osserva i grafici di spostamento, velocità e accelerazione in funzione del tempo.

Sono grafici di funzioni sinusoidali il cui periodo può essere stimato calcolando il tempo che intercorre tra un massimo (o un minimo) e il successivo.

Per ottenere una misura più accurata scegli il primo massimo (o minimo) e l'ultimo, e calcola l'intervallo di tempo tra i due.

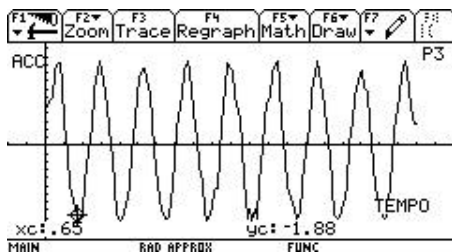
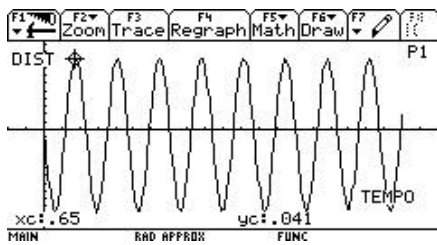
Il periodo si ottiene dividendo tale intervallo di tempo per il corrispondente numero di massimi (o minimi).

Il periodo risulta uguale per i tre grafici? Perché?

Perché il periodo calcolato come separazione temporale tra due massimi (o minimi) adiacenti risulta in generale una misura meno precisa? La precisione di questa misura dipende dalla scelta della frequenza di campionamento (cioè da quante misure sono state effettuate in un secondo)?

Puoi confrontare il periodo misurato con il valore previsto dalla teoria (vedi Modello teorico).

## Accelerazione in funzione dello Spostamento



Osserva i due grafici dello spostamento  $x(t)$  e della accelerazione  $a(t)$  in funzione del tempo. Per paragonarli può esser utile porli uno sotto l'altro.

Osserva che il periodo è lo stesso, ma sono in opposizione di fase. Quindi si può supporre che sia:

$$a(t) = -\text{const} \cdot x(t)$$

Per verificare questa ipotesi puoi fare un grafico della accelerazione in funzione dello spostamento.

Che tipo di grafico ti aspetti?

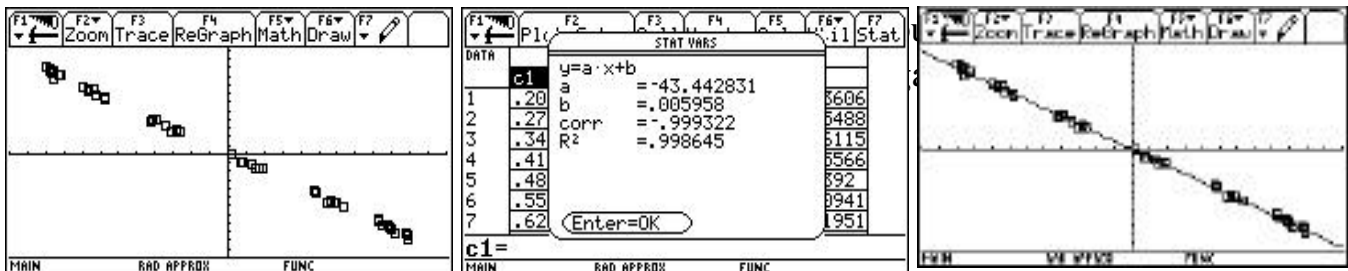


Grafico della accelerazione in funzione dello spostamento.

L'osservazione del grafico mette in luce la relazione di proporzionalità tra  $a$  e  $x$ :

$$a(t) = -\text{const} \cdot x(t)$$

Qual è il significato fisico della costante di proporzionalità ?

Prova una analisi dinamica:

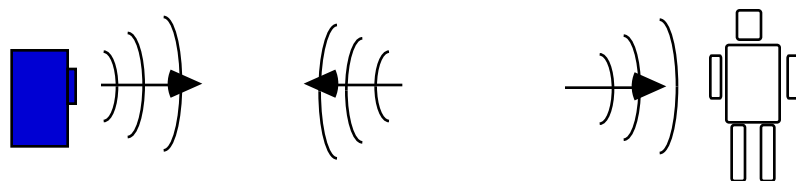
La seconda legge di Newton  $ma = F_{el}$  indica che  $ma = -kx \rightarrow a = -(k/m)x \rightarrow a = -\omega^2 x$

### Metodo alternativo per calcolare il periodo.

Dal grafico della accelerazione in funzione dello spostamento troviamo che  $a = -\omega^2 x$  e dalla pendenza  $\omega^2$  possiamo ottenere il periodo  $T = 2\pi / \omega$

## Help Box: Sonar

Per misurare la distanza di un oggetto possiamo usare la riflessione di un'onda sonora diretta al corpo. Il tempo  $t$  trascorso prima che l'onda riflessa (eco) raggiunga l'emettitore fornisce indirettamente una misura della distanza.



Il sonar è sia emettitore che ricevitore dell'onda sonora.

Dal valore noto  $c$  della velocità del suono in aria il calcolatore ricava la distanza  $X = c \cdot (t/2)$

(dato che il percorso completo di andata e ritorno è  $2X$ ).

La velocità del suono a temperatura ambiente  $T$  (Celsius) è :

$$c = (331 + 0.6t) \text{ m/s} , \text{ ovvero circa } c = 344 \text{ m/s at } t = 22 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La distanza minima misurabile con il sonar Vernier è circa 40 cm, e l'intervallo minimo tra campionamenti è 0.08 s. Normalmente la distanza è assunta crescente quando il corpo si allontana dal sonar.