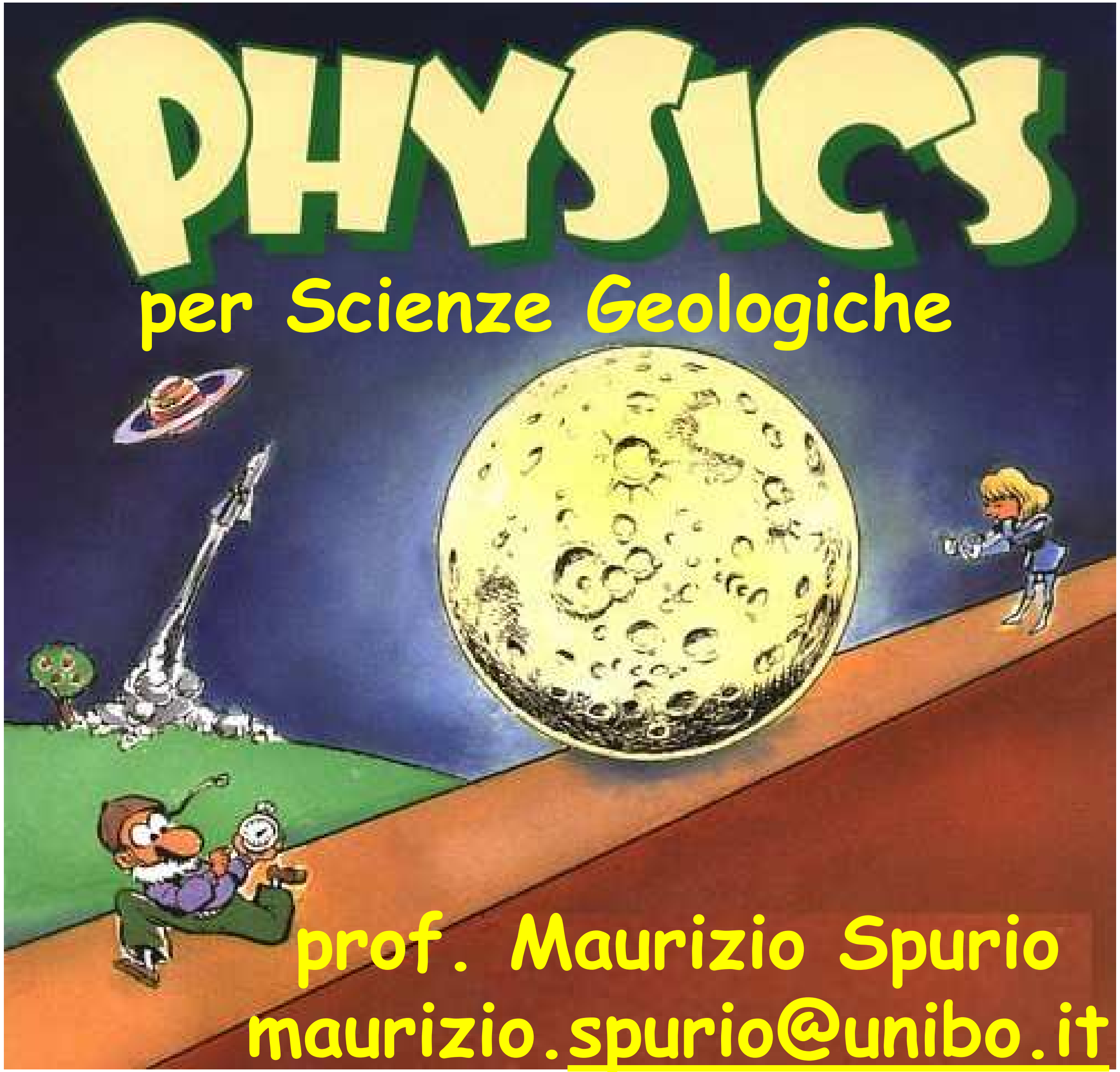


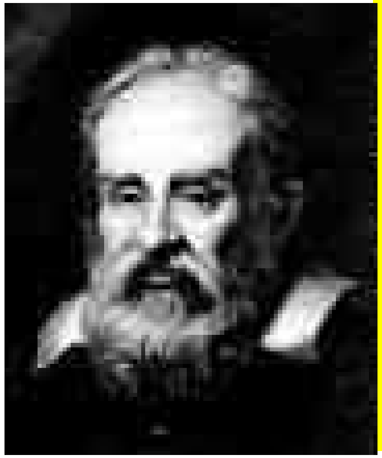
per Scienze Geologiche

prof. Maurizio Spurio
maurizio.spurio@unibo.it

Il Metodo Scientifico

La storia della Scienza moderna inizia in Grecia: nascita della logica, della filosofia, della matematica e primi tentativi di studiare il mondo utilizzando un abbozzo di **metodo scientifico**

- Osservazioni e misure
- Costruzione di un modello matematico
- Utilizzo predittivo del modello
- Confronto tra predizioni e nuove osservazioni

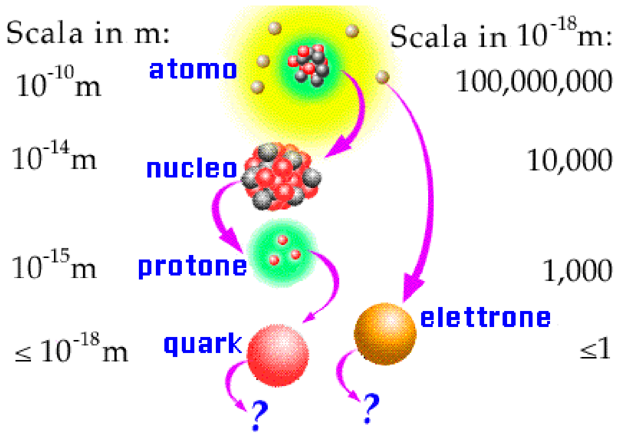


Galileo, 1564-1642

La Scienza è la grande avventura di esplorazione collettiva dell'Umanità.

Il metodo scientifico è "**distribuito**" e non è appannaggio di un solo soggetto. Gli scienziati non sono isolati, ma formano una comunità unica.

Da infinito...



I mattoni dell'Universo sono gli **atomi**, costituiti a loro volta da **elettroni**, **protoni** e **neutroni**.

Gli atomi si riuniscono e formano **Molecole**

Gli elettroni sono legati al nucleo dalla ***forza elettrica***.

Protoni e neutroni sono legati tra loro da una forza più intensa, la ***forza forte***.

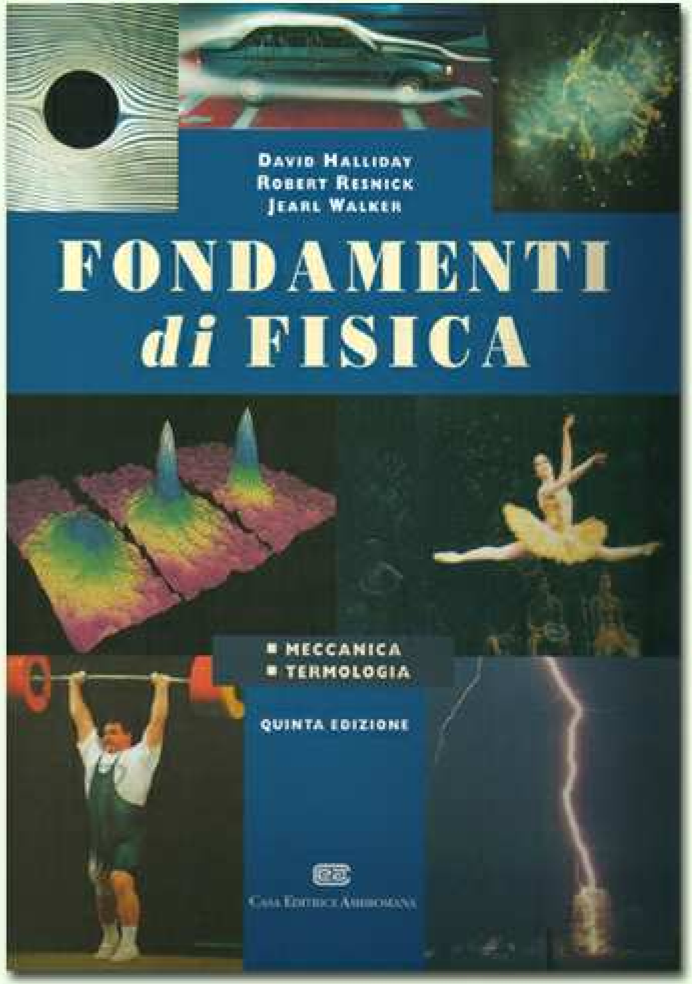
….a infinito

- Le stelle splendono per tanto tempo a causa della ***forza debole***.
- Gli oggetti celesti sono legati dalla ***forza di gravità***

Fisica e Geologia

Libri di Testo

VOLUME 1

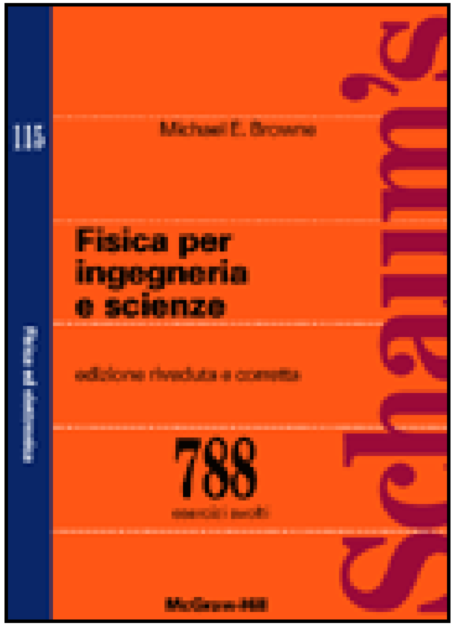


Le **illustrazioni** utilizzate sono nella maggior parte estratte da: Halliday-Resnick-Walker, CEA.

VOLUME 2

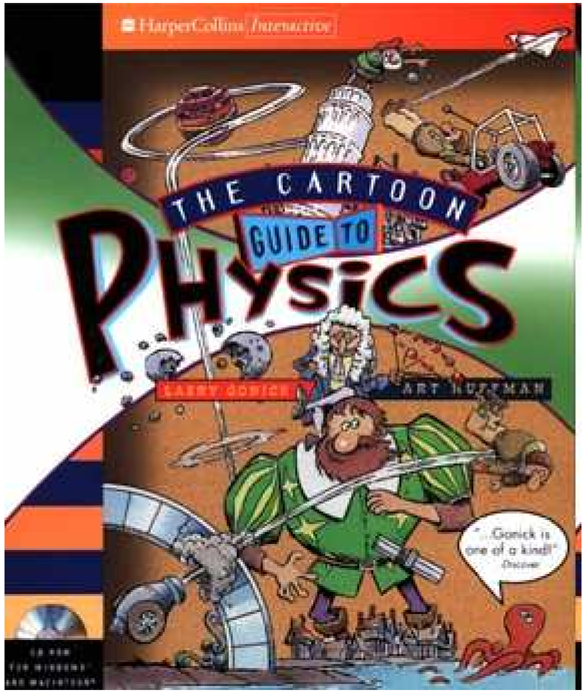
- Gli argomenti trattati sono presenti in tutti i libri di Fisica Generale che contengano:
- Meccanica
- Elettromagnetismo

Altro libro in alternativa:



Fisica per ingegneria e scienze - Ristampa riveduta e corretta
di: Michael E. Browne
Prezzo: Euro 23,00,
480 pagine
collana: Schaum's

Cartoon Physics:
non un libro di testo, ma..



The cartoon guide to physics di Larry Gonick & Art Huffman
HarperCollins Publishers
divertente, corretto (ed utile per l'inglese…)

Avvertenza…

Le seguenti trasparenze sono utilizzate durante la lezione.
NON possono quindi essere considerate autoconsistenti, ma necessitano delle spiegazioni, di alcune dimostrazioni e passaggi presentate durante la lezione (magari sulla tradizionale lavagna).
Sono però utili per aiutare lo studente a prendere appunti, per avere sottomano le formule da usare negli esercizi e per selezionare nei libri consigliati le parti svolte.

Maurizio Spurio

L’esame…

•L’iscrizione agli esami è OBBLIGATORIA: basta un mail a maurizio.spurio@unibo.it

• L’esame è **ORALE**. Per accedere all’orale occorre superare un (semplice) scritto con voto in 30mi.

•Il voto dello scritto non condiziona il voto finale (con 18 allo scritto si può avere 30 e lode)

• Generalmente, la durata dell’esame orale è inversamente proporzionale al voto dello scritto.

•Dopo due scritti insufficienti, si può sostenere l’orale. Dall’esperienza, la probabilità di prendere un voto> 18 è piccola.

•La validità degli scritti è di due sessioni.

•Il voto dello scritto con cui si partecipa all’orale è comunque il migliore tra i voti conseguiti.

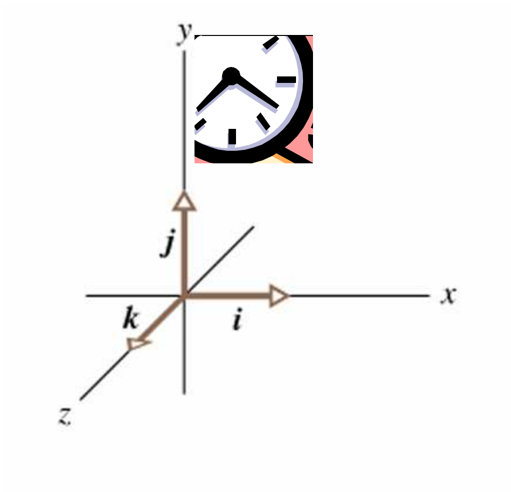
• Altre domande?

1. Misurare oggetti

Converting feet to meters

Sistemi di riferimento

Sistemi di riferimento: necessari per localizzare un evento nello spazio e nel tempo



Generalmente, utilizzeremo un **S**istema di **R**iferimento **C**artesiano **O**rtogonale (SiRCO).
Un evento e' localizzato con le coordinate:

(x,y,z,t)

Misure di segmenti e distanze: il METRO

•misurare un segmento significa adottare una procedura di misura, utilizzando una grandezza **omogenea** da confrontare

- Definizione di ***campione.*** Requisiti:

Metro Campione (1796)

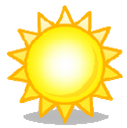
- preciso
- accessibile
- riproducibile
- invariabile

Oggi: Si utilizzano le conoscenze della Fisica (quantistica, atomica, relatività…)

1 m = lunghezza percorsa dalla luce in 1/299.792.458 s

Misure di Tempo

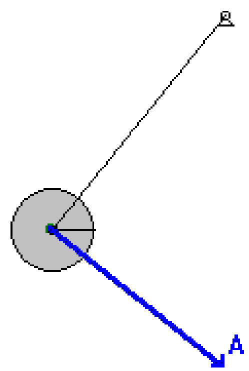
Misura di un ***intervallo di tempo***: si utilizza un fenomeno *periodico*



Il giorno solare è stato un buon campione e per molto tempo. Tuttavia, la durata del giorno e' variabile (per motivi astronomici)

1 s = tempo necessario all'atomo di ^{133}Cs per effettuare 9.192.631.770 oscillazioni

Un altro moto periodico: il pendolo



(lo studieremo più avanti)

Il Sistema Internazionale

- Misura di Massa: il Kg

Esiste un campione di massa (1 kg), un cilindro di platino-iridio conservato presso l'Ufficio Int. Pesi e Misure di Sevres

BIPM

Oggi, si preferisce utilizzare come campione l'atomo di ^{12}C, il quale ha una massa di:

$$\mathbf{m(^{12}C) = 1.66605402\ 10^{-27}\ kg}$$

Altre unità di misura del SI

- Misura di Temperatura: il Kelvin (K) → (Cap. xx)

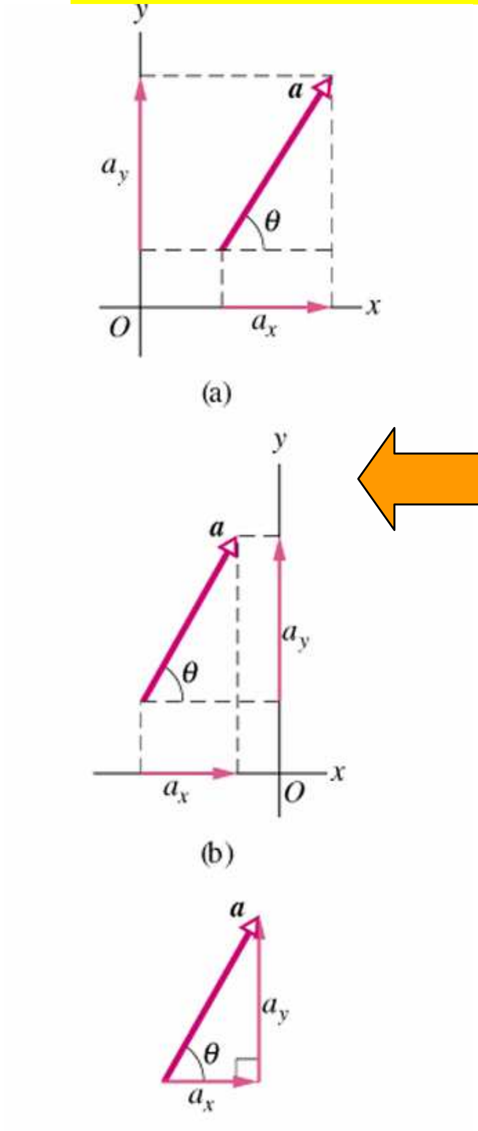
- Misura di Carica Elettrica: Il Coulomb (C)* → (Cap. xx)

- Misura di quantità di sostanza: la mole (mol) → (Cap. xx)

- Misura di intensità luminosa: la candela (cd)

*nota: il realtà il C nel SI è recentemente divenuta grandezza derivata dall'Ampere. Per semplicità didattica, considero l'Ampere derivato dal Coulomb, e non viceversa.

2-Grandezze scalari e vettoriali



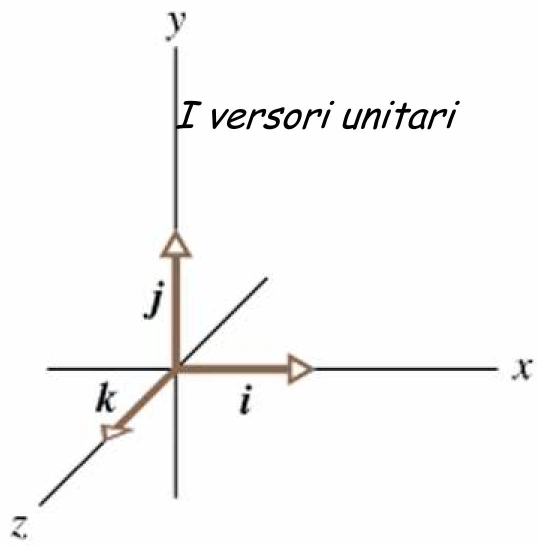
La ***posizione*** di un corpo in un SiRCO è definita da una terna di grandezze (x,y,z). Le grandezze che, come la posizione, hanno bisogno di 3 numeri per essere definite, sono chiamate ***vettori.***
In maniera analoga, un vettore può essere definito da (vedi esempio a lato):

- un modulo (o intensità
- dalla sua direzione
- da un verso

Una grandezza vettoriale viene sempre indicata in grassetto o con la freccia : **v** , $\vec{v}$
Il modulo del vettore viene indicato senza freccia!

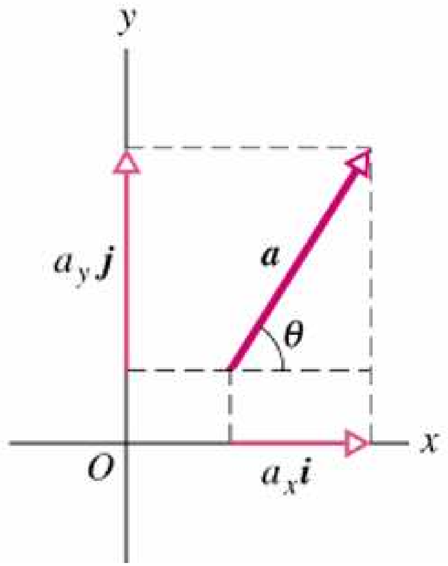
Il ***tempo*** è invece una grandezza *scalare:* si indica con il carattere normale: t

Versori



Una volta scelto uno SiRCO, ciascun vettore spostamento può essere costruito con tre componenti sugli assi ortogonali:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \end{aligned}}$$

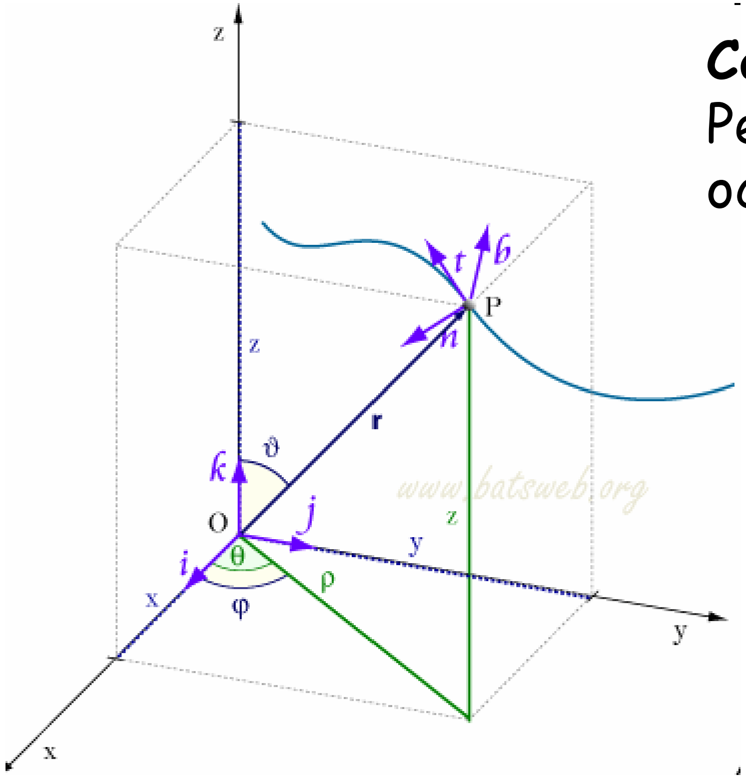


Caso bidimensionale:
Si può verificare che:

$$a_x = a\cos\vartheta$$
$$a_y = a\sin\vartheta$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$tg\,\vartheta = \frac{a_y}{a_x}$$



Caso tridimensionale:
Per definire el 3 componenti di un vettore, occorre un modulo e due angoli:

$$a_x = a\cos\vartheta\cos\varphi$$
$$a_y = a\cos\vartheta\sin\varphi$$
$$a_z = \sin\vartheta$$

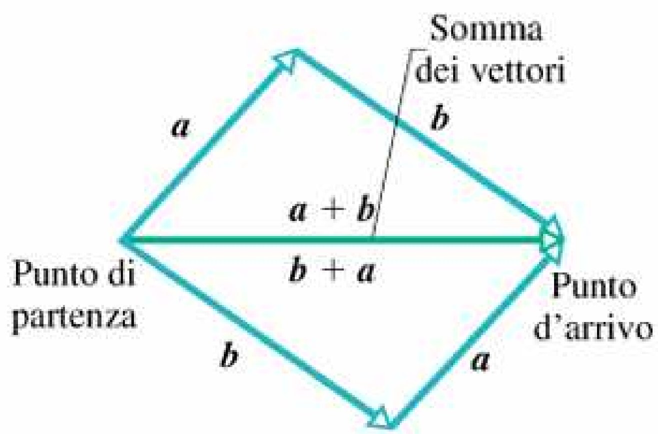
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$tg\ \varphi = \frac{a_y}{a_x}$$

$$tg\ \vartheta = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

Esercizio: mostrare che se ***c=a + b****, allora:*
$c_x = a_x+b_x$, $c_y = a_y+b_y$,
$c_z = a_z+b_z$

Somma di vettori



Si può andare dalla partenza all'arrivo sia con un unico *step*, sia con due (o più)

Questa operazione e' la ***somma vettoriale*** di due vettori. Per la somma dei vettori si usa graficamente la *regola del parallelogramma*.

*Esercizio 2.1: Mostrare come devono essere i vettori **a** e **b** perché*
i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{a}$ ***ii)*** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sqrt{2}\,\mathbf{a}$ *iii)* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$

Moltiplicazione di uno scalare per un vettore

Il risultato del prodotto di uno scalare k per un vettore **v** è una grandezza **vettoriale**, con la stessa direzione e verso concorde (se k>0) del vettore, e modulo pari al prodotto kv.

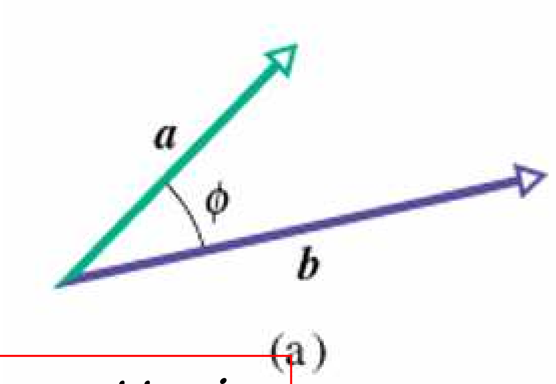
Esercizio : mostrare che se k=-1 la direzione del vettore si inverte

Prodotto Scalare tra vettori

Dati i vettori **a** e **b**:

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$

$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$



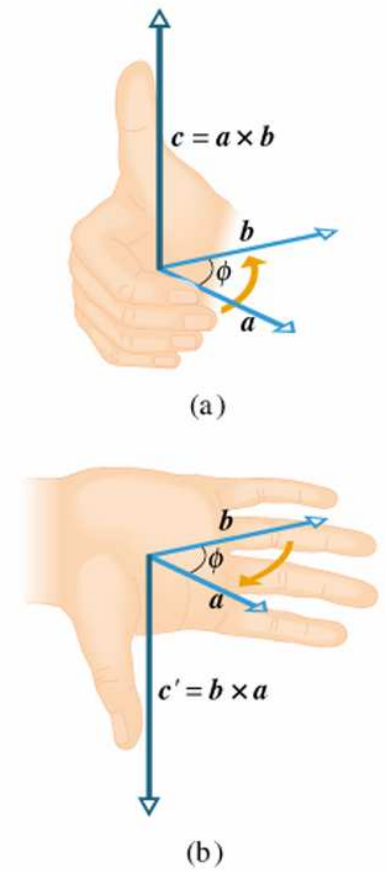
Si definisce *prodotto scalare tra vettori* la grandezza **scalare**:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\phi$$

Il prodotto scalare (il puntino è obbligatorio!) è una operazione molto importante in Fisica; infatti, molte grandezze vettoriali (spostamento, velocità, forza…) si combinano tra loro per formare altre ***grandezze scalari*** tramite il prodotto scalare.
Il prototipo di queste è il *lavoro* (dimensionalmente, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$)

Esercizio: mostrare che:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Prodotto vettoriale tra vettori



Dati i vettori **a** e **b**:

$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$

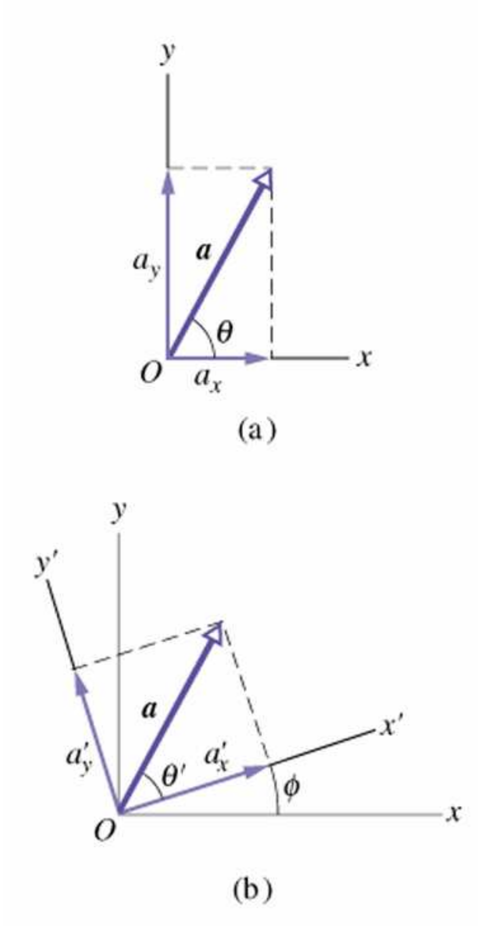
Si definisce *prodotto vettoriale tra vettori* la grandezza **vettoriale**:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

- il modulo e': $a\, b \sin\phi$
- la direzione è perpendicolare al piano contenente **a** e **b**;
- il verso è dato dalla regola della mano destra.

Esercizio: mostrare che:

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}$



I vettori e le leggi della fisica

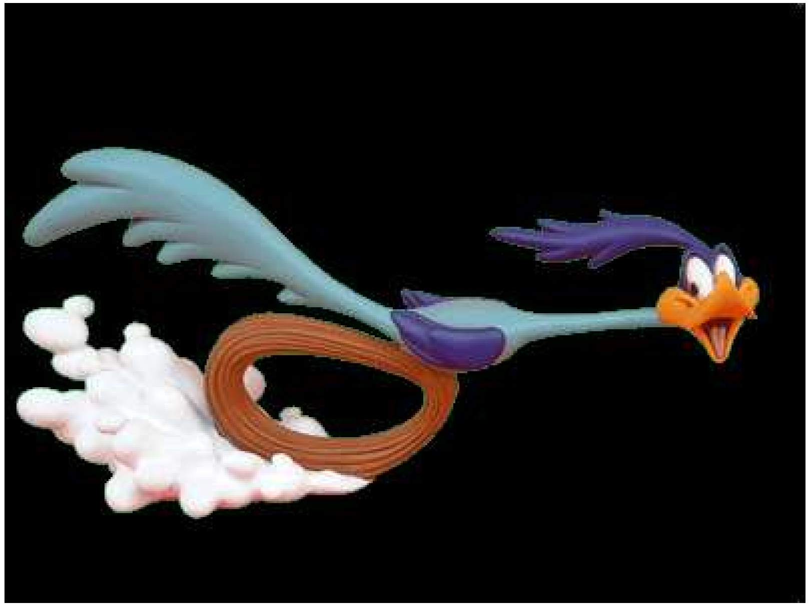
Supponiamo di avere due osservatori, ciascuno con il suo SiRCO. Nei due sistemi, i vettori **a** e **b** avranno differenti componenti; tuttavia, le operazioni di *somma*, *prodotto scalare* e *prodotto vettoriale* tra vettori rimangono immutate.

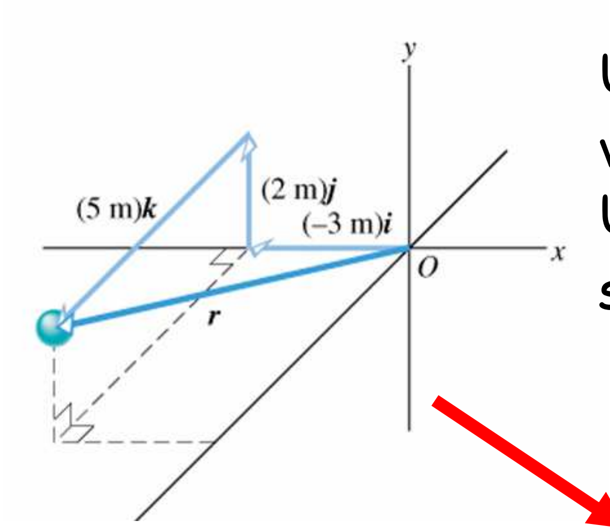
Ogni volta che ho espresso una legge in forma vettoriale, non ho bisogno di verificare se la legge resta immutata se io **traslo** (=sposto l'origine del SiRCO) o **ruoto** il SiRCO.

Esercizio: mostrare che se $\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y}$ allora $\mathbf{a} = (\mathbf{a'_x} + \mathbf{a'_y})$ con:
$\mathbf{a'_x = (a_x \cos\phi + a_y \sin\phi)}$ $\mathbf{a'_y = (a_x \sin\phi - a_y \cos\phi)}$

Esercizio: mostrare che se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Allora è anche: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a'_x b'_x + a'_y b'_y + a'_z b'_z$

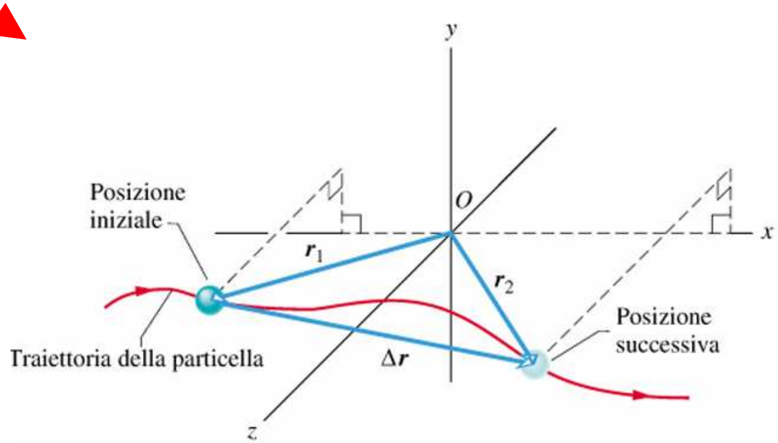
3- Cinematica del punto





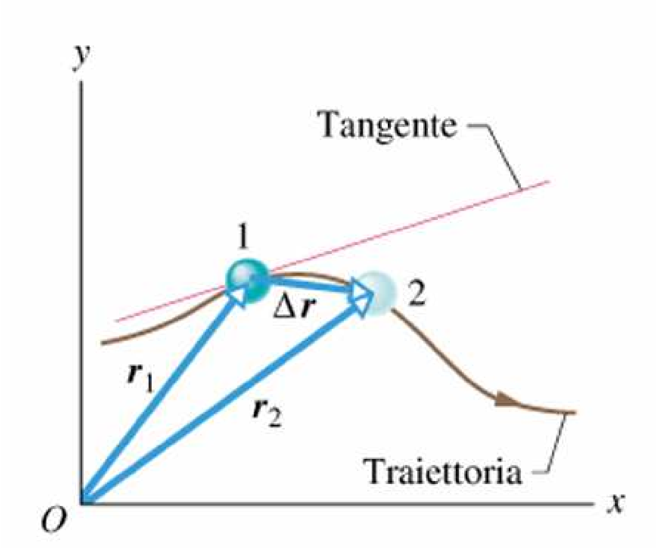
Un punto materiale è localizzato dal vettore posizione ***r***

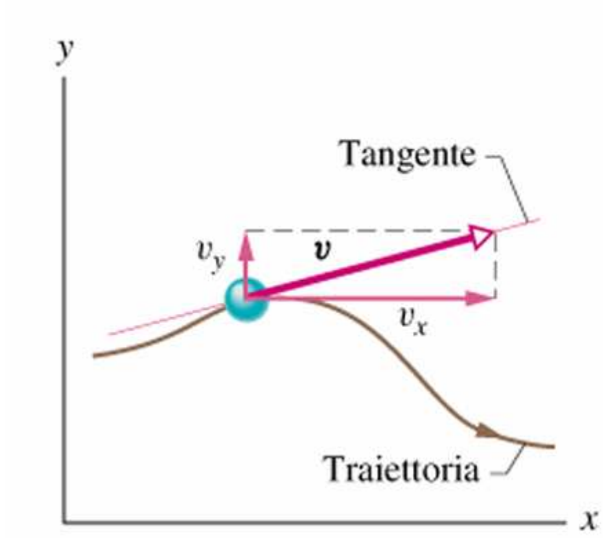
Una variazione di posizione si definisce spostamento e viene indicata da $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$



Si definisce l'insieme dei punti nello spazio toccati dal punto in istanti di tempo successivi ***traiettoria*** della particella.

Variazione della posizione





Si definisce velocità media il rapporto tra lo spostamento della particella e la durata Δt dell'intervallo in cui avviene.
Nel caso in cui l'intervallo di tempo sia infinitesimo (dt) , la direzione dello spostamento $\boldsymbol{\Delta r} \rightarrow \boldsymbol{dr}$ coincide con la **tangente** alla traiettoria.

Velocità

Si definisce **velocità** (o velocità istantanea) il rapporto:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

La velocità e' una grandezza le cui dimensioni sono [spazio]/[tempo].
Nel S.I. si misura in m/s

La **velocità** di una particella in un punto ha sempre la direzione di d**r**, ossia della retta tangente alla curva che rappresenta la traiettoria.

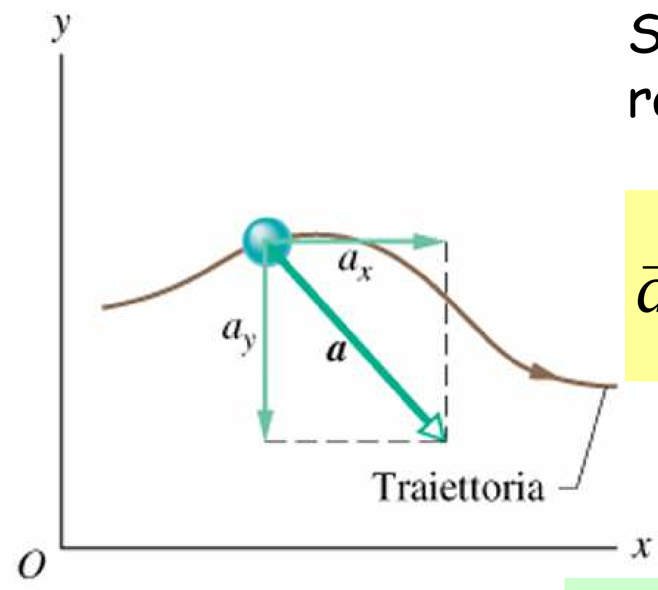
Se la traiettoria è data in forma parametrica del tempo come:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

(questa equazione si chiama legge oraria) allora le componenti della velocita' sono:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Accelerazione



Si definisce **<u>accelerazione</u>** di un corpo il rapporto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

L'accelerazione e' una grandezza le cui dimensioni sono [spazio]/[tempo^2]. Nel S.I. si misura in m/s^2

La accelerazione di una particella rappresenta la variazione di velocità al variare del tempo.

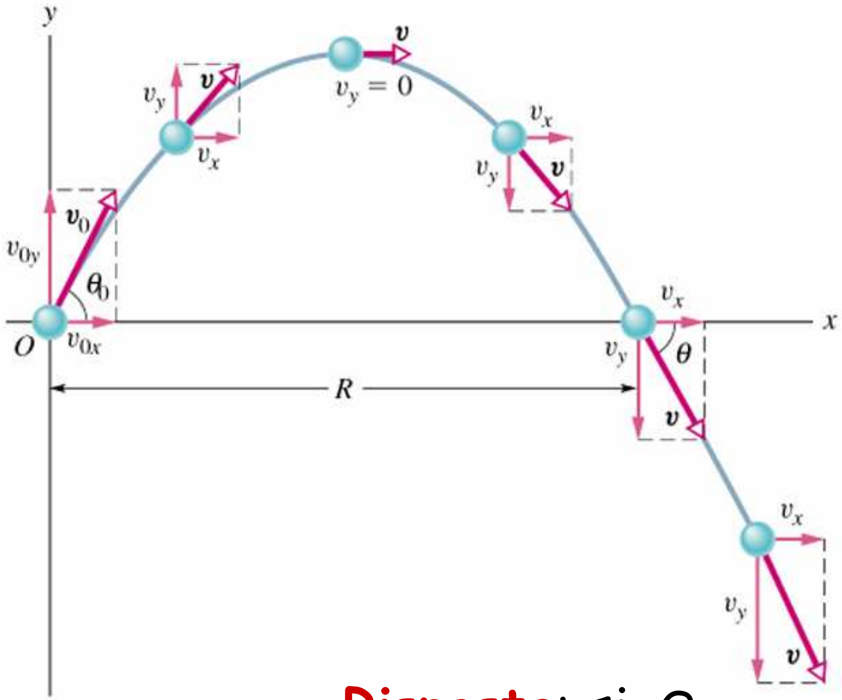
L'accelerazione è una grandezza molto importante. Mostreremo che <u>il moto di un corpo</u> (= legge oraria!) <u>è noto se è nota l'accelerazione</u>.
In altri termini: conosci **a** per conoscere il moto!

Esercizio 3.1. Calcolare le componenti della velocità se: $\mathbf{r} = kt\,\mathbf{i} - bt^2\,\mathbf{j}$.

Esercizio 3.2. Disegnate la ***traiettoria*** *della particella dell'es. 3.1* (k=4, b=1)

Esercizio 3.3. Calcolare le componenti della accelerazione se: $\mathbf{r} = kt\,\mathbf{i} - bt^2\,\mathbf{j}$.

Il problema diretto della cinematica: dalla traiettoria all'accelerazione



Sperimentalmente, è possibile conoscere la traiettoria di un oggetto lanciato da un "cannone": $y=-\alpha x^2+\beta x$ (vedi figura).

Siete in grado di ricavare velocità ed accelerazione?

Risposta: si. Occorre dapprima scrivere la legge oraria (parametrizzare le coordinate in funzione del tempo):

$$\begin{cases} x(t) = v_{ox}\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g\, t^2 + v_{oy}\, t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

(sostituite per determinare v_{ox}, v_{oy}, g da α e β)

Troverete così che il moto lungo l'asse x avviene a velocità costante e senza accelerazione (moto rettilineo uniforme), mentre lungo l'asse delle y avviene con velocità che aumenta linearmente col tempo, ed accelerazione costante (moto uniformemente accelerato). *I due moti sono indipendenti l'uno dall'altro*

Una volta nota la traiettoria, si possono ricavare dalla definizione velocità ed accelerazione del corpo in movimento. Nel nostro caso:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v_{xo}; \qquad a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = 0$$

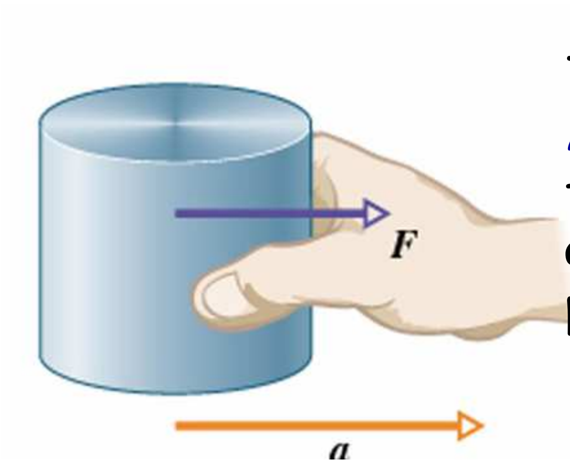
$$v_y = \frac{dy(t)}{dt} = gt + v_{yo}; \qquad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = g$$

Il problema inverso: dalla accelerazione alla traiettoria.

Il punto fondamentale sarà che avremo una legge che ci permetterà di conoscere l'accelerazione di un corpo note le sue **interazioni** con gli altri corpi. In tal caso, si potrà risolvere il problema inverso della cinematica: ossia potremo risalire dalle *interazioni* tra corpi al *moto* dei corpi stessi. Se conosciamo le interazioni, potremo lanciare satelliti, far muovere come vogliamo gli elettroni nei tubi catodici della TV…

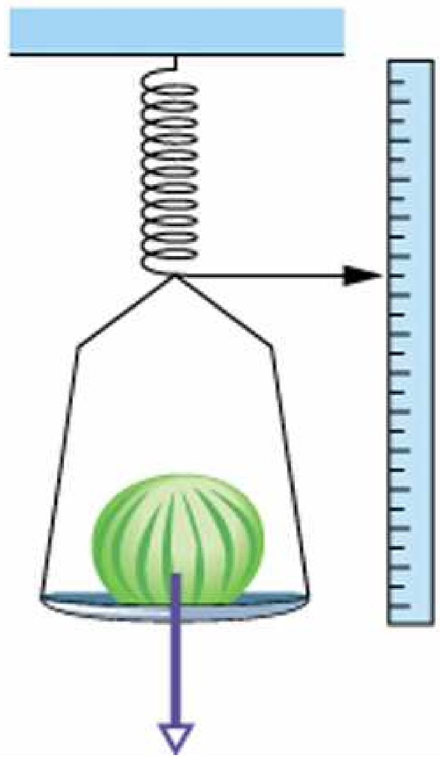
4. La forza

Definizione operativa di forza

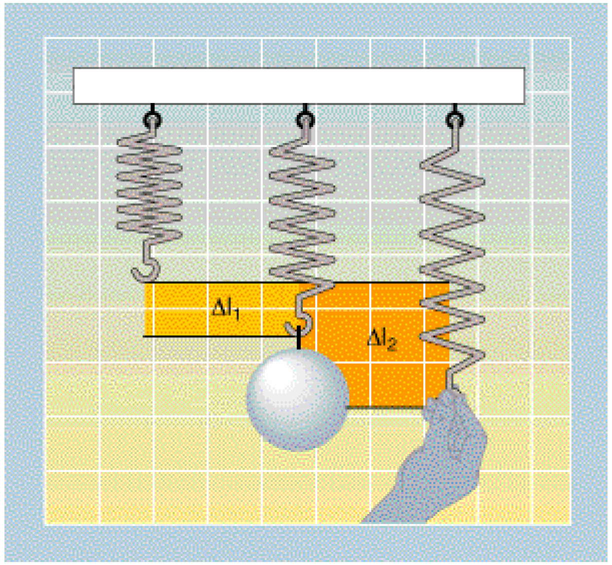


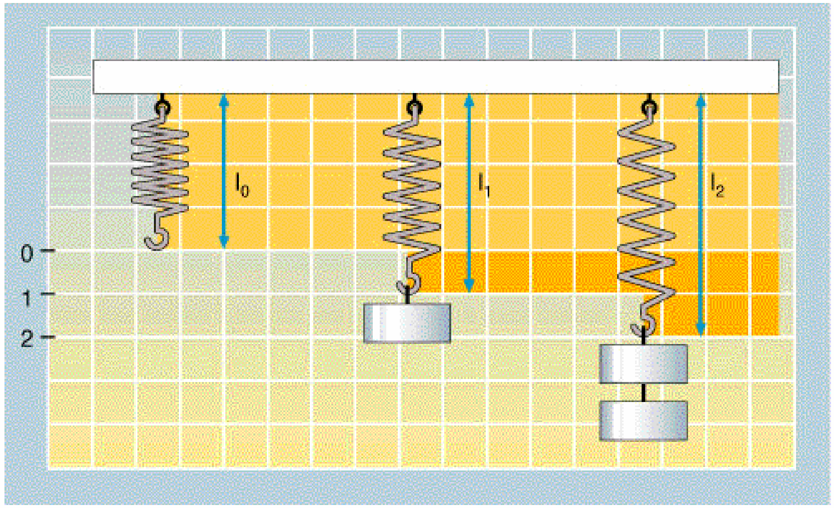
Tutti conoscono il concetto antropomorfico di *sforzo muscolare*, che è un descrittore (NON una grandezza fisica) di una sensazione comune. Troveremo che dovremo applicare uno sforzo muscolare per vincere una forza che può essere di varia natura (gravitazionale, elettrica…)

Dobbiamo trovare un ***procedimento operativo*** con cui esprimere questo nuovo concetto. Lo strumento che ci permette di essere quantitativi è il dinamometro (D). Noi dobbiamo esercitare uno sforzo per sollevare un cocomero. La molla del (D) si allunga di una quantità Δl. Dobbiamo esercitare uno sforzo doppio per sollevare due cocomeri: la molla del (D) si allungherà di $2\Delta l$. Attenzione: dovremo *curare* le proprietà dello strumento (linearità).



Il dinamometro e la forza





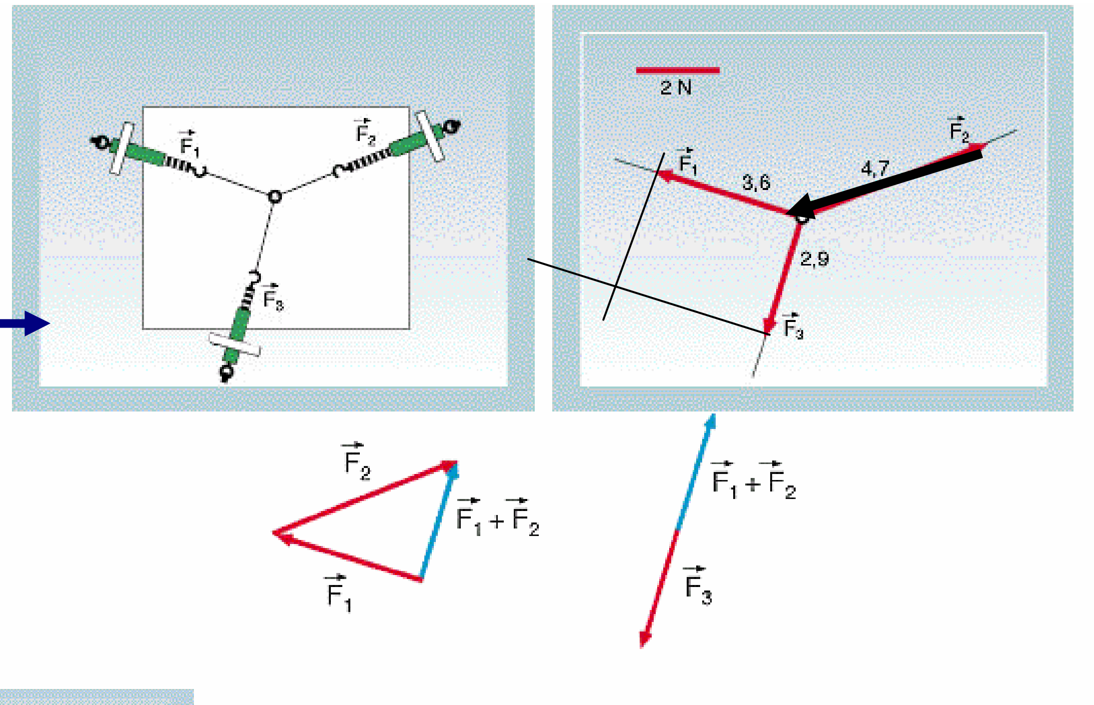
Vi è corrispondenza tra lo sforzo e la forza esercitata. ⇒ Lo strumento è <u>*lineare*</u>

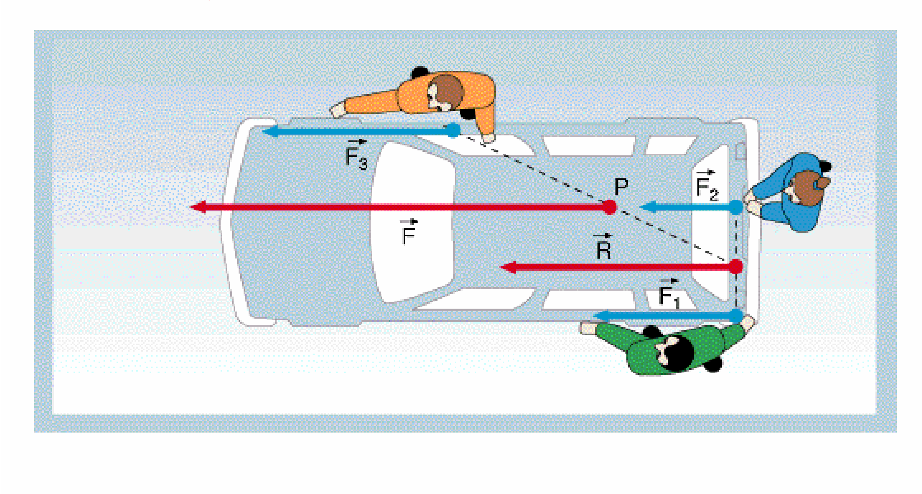
Quando notiamo che vi è una variazione di velocità su un corpo, possiamo affermare che su questo si è esercitata una ***forza***

Lo strumento che utilizziamo per misurare le forze è il dinamometro.
La forza è una grandezza **vettoriale**: infatti, la somma di due forze dà come risultato una forza il cui modulo,direzione e verso è dato dalla somma dei vettori.

Natura vettoriale della Forza

E’ anche questa una osservazione di carattere sperimentale.
Forze con diverse direzioni:
Forze con la stessa direzione





Risultante delle forze con la regola del parallelogramma

La massa e la II Legge della Dinamica

Sperimentalmente, si è osservato che se viene applicata una forza, su un corpo si produce una accelerazione (l'osservazione proviene da Galileo). → $F \propto a$

Newton fissò il coefficiente di proporzionalità, che dipende da **una** proprietà del corpo soggetto alla forza: la sua **massa**. → $\vec{F} = m\vec{a}$

Seconda legge di Newton. La forza (misurabile con un dinamometro) agente su un punto materiale è proporzionale all'accelerazione prodotta tramite un coefficiente che è la massa del punto materiale.

Le unità di misura della forza

Tale relazione esprime una legge, che lega grandezze fisiche diverse (**F**, misurabile con un dinamometro, e **a**, misurabile con metri e cronometri). Poiché l'unità di massa è fissata, e l'accelerazione è definita, la II Legge di Newton permette di *definire* l'unità di forza:

Se un oggetto di massa 1 kg subisce una accelerazione di 1 m/s^2, su di esso si esercita una forza pari a 1 Newton (N). 1 N= 1 kg ms^{-2} .
Le dimensioni della Forza sono: **[Forza] = [MLT^{-2}].**

La prima legge della Dinamica

Esistono delle situazioni in cui la II Legge di Newton sembra falsa:
Ad es, su di una giostra rotante un oggetto non “ancorato” inizia a muoversi, senza che apparentemente vi sia una forza esercitata.

Newton si rese conto di questo nella sua I legge:

Prima legge di Newton. Se su un corpo non agisce nessuna forza, la velocità del corpo non può cambiare, ossia il corpo non accelera.

Come corollario, ne consegue che la II legge **NON** è valida in tutti i sistemi di riferimento (ad es. su una giostra). I sistemi di riferimento in cui è verificata la II legge della Dinamica si chiamano **sistemi di riferimento inerziali (SRI).** La giostra non costituisce un SRI.

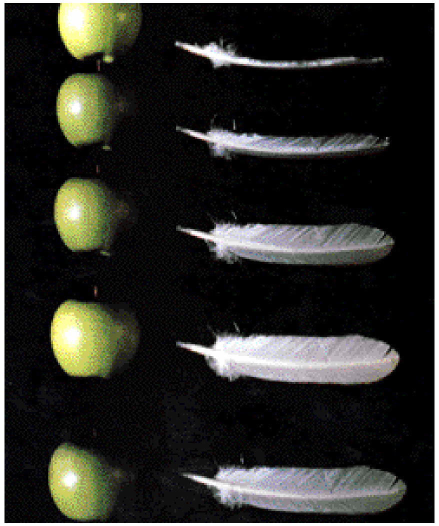
Qual è un SRI è un problema di natura sperimentale, e dipende dal grado di precisione con cui si devono risolvere i problemi.

Esercizio 4.1. La terra è un sistema di riferimento inerziale?

Eser.4.2. Sapreste far vedere che se conoscete 1 SRI, allora ne conoscete infiniti?

5-Alcuni esempi di forze

5.1 forza peso



Noi abbiamo esperienza del fatto che, se lasciamo un corpo ad una certa altezza, esso cade. Sul corpo agisce una forza, che è la **forza gravitazionale** (di cui discuteremo in seguito).

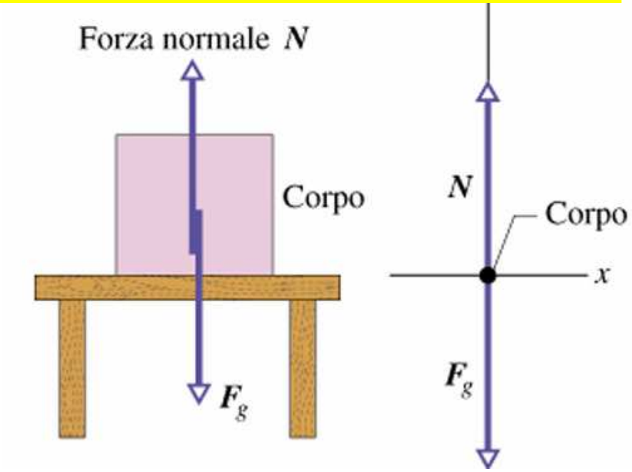
In prossimità della terra, qualunque corpo (se trascuriamo *l'attrito*), cade con la stessa accelerazione, ossia è soggetto a una forza costante lungo la verticale che si chiama **forza peso**: $\mathbf{F = mg}$

Attenzione 1: il peso è una forza, e si misura in Newton, la massa si misura in kg!

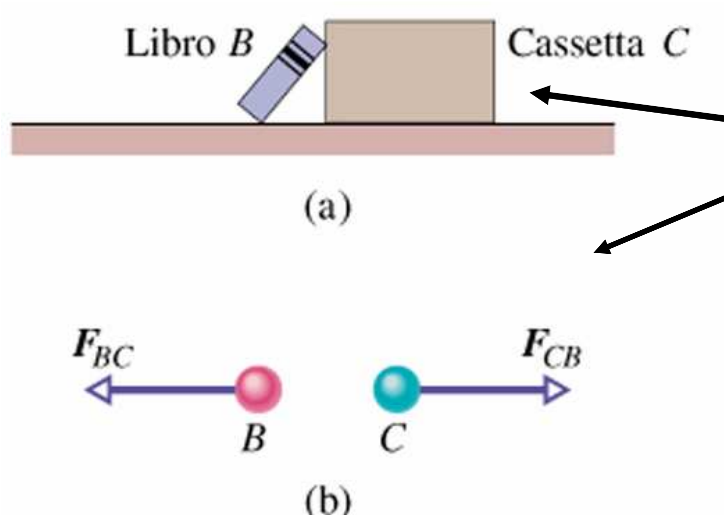
Attenzione 2: con la forza peso, conviene far coincidere uno degli assi di un SiRCO con la verticale. In tal caso, si possono omettere anche i simboli di vettore!

La III legge della dinamica (azione e reazione)

Se appoggiate un oggetto su un tavolo, su di esso agisce la forza peso, ma l'oggetto ***non cade*** ! Questo avviene perché la superficie del tavolo spinge il corpo con una forza ***N***, esattamente contraria al peso. (La superficie,anche se apparentemente rigida, si deforma. Sono *forze elettriche* tra i microscopici costituenti della materia che reagiscono al peso)

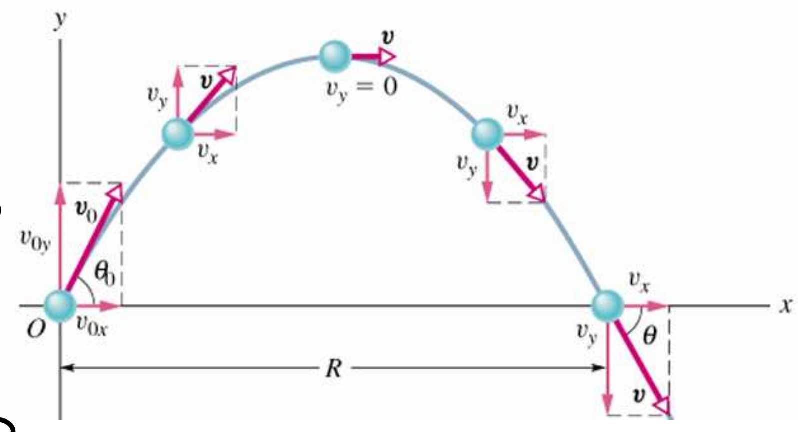


Terza legge di Newton. Quando due corpi interagiscono, le forze esercitate da un corpo sull'altro sono uguali in modulo e direzione, ma verso opposto.



Impareremo che le forze possono esercitarsi non solo quando vi sia un *contatto*, ma anche con azione a distanza (forze gravitazionali, elettriche…). Anche in tal caso si applica la terza legge

Esempio: il moto dei proiettili



Studiamo il moto di un proiettile, sottoposto alla forza peso F=-mg lungo l'asse delle y. Esso e' lanciato con velocità v_o= 330 km/h dall'origine del SiRCO ad un angolo θ_o= 60° rispetto l'orizzonte. Determinare la *gittata* R e la sua massima altezza.

Risoluzione: occorre dapprima scrivere le equazioni del moto:

$$\begin{cases} F_x = m dv_x/dt = 0 \\ F_y = m dv_y/dt = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = -gt + v_{0y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x}\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}\, t \end{cases}$$

La gittata R e la massima altezza possono essere determinate ricavando la traiettoria del corpo (*una parabola*):

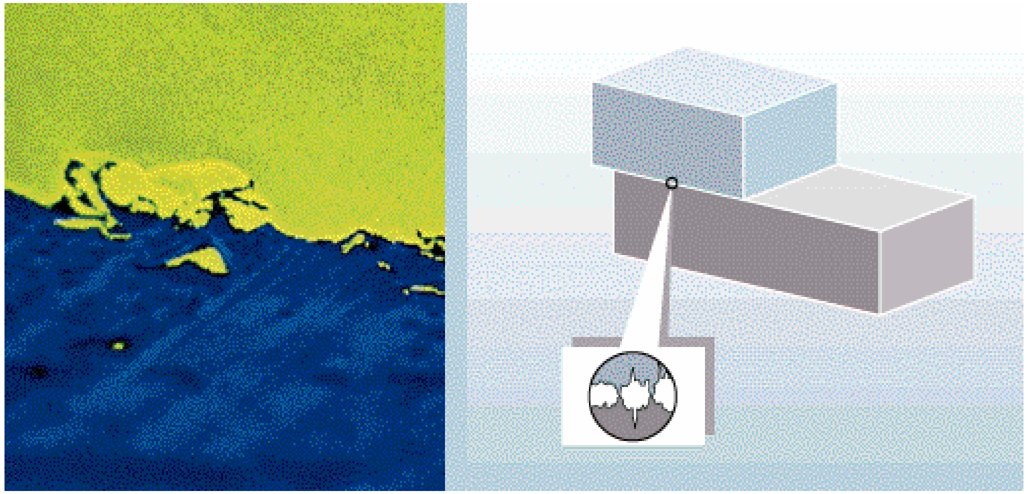
$$y(x) = -\frac{1}{2}(g/v^2_{0x})x^2 + (v_{0y}/v_{0x})x$$

e richiedendo che intersechi l'asse y=0. La massima altezza come si può determinare?

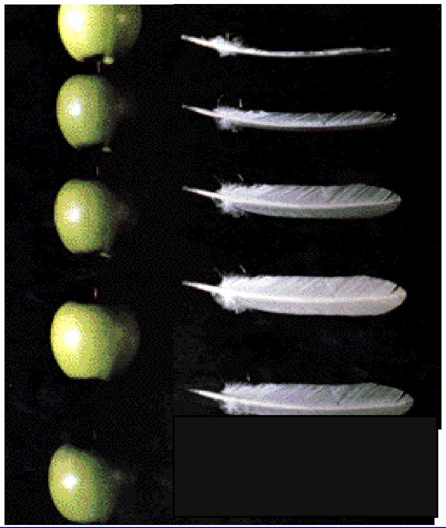
5.2 L'attrito

La nostra esperienza quotidiana è *contaminata* dalla **forza di attrito**,

- sia quando trasciniamo un oggetto appoggiato su una superficie (attrito dinamico)
- sia quando lasciamo cadere un oggetto leggero in aria (resistenza del mezzo).



Un particolare di cosa avviene a livello quasi microscopico tra due materiali in contatto, da cui si origina la forza di attrito



In presenza di attrito, oggetti diversi possono avere velocità diverse!

1- ***Attrito dinamico***: il modulo della forza viene parametrizzato dalla formula:

$$F= \mu N$$

dove N è la componente normale della forza, e μ un coefficiente che dipende dai materiali in contatto

2- ***Resistenza del mezzo***: il modulo della forza viene parametrizzato dalla formula:

$$F=\eta v$$

Dove v è la velocità del corpo, η è un coefficiente

Fisica e Matematica: la velocità di caduta limite

Esercizio 5.1. Calcolare la massima velocità raggiunta da un oggetto (goccia di pioggia, paracadutista) con coefficiente η in caduta libera.

$$F \equiv m\frac{dv}{dt} = mg - \eta v$$

Equazione del moto dalla II legge della dinamica

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{\eta}{m}v}$$

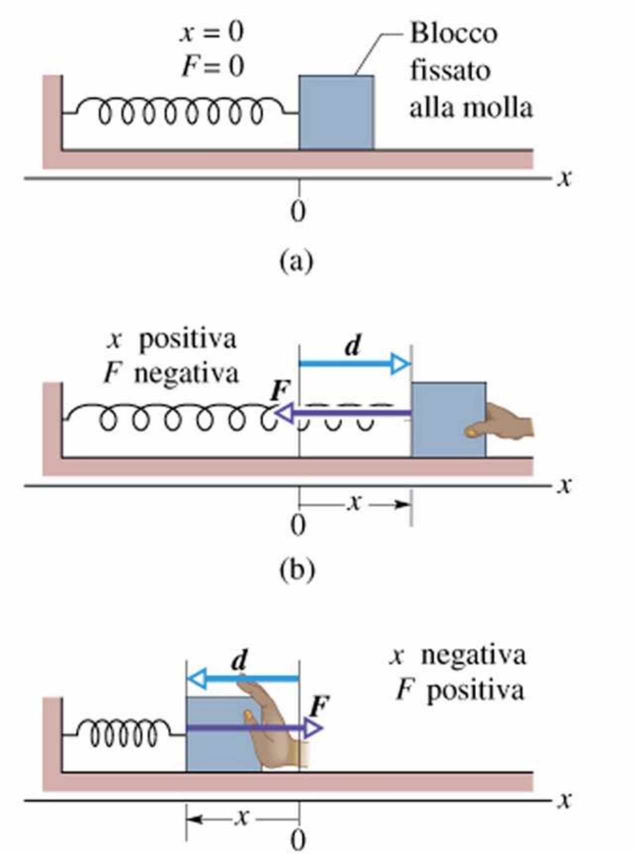
Equazione differenziale da risolvere per separazione delle variabili

Soluzione $\frac{m}{\eta}\frac{d(g-\frac{\eta}{m}v)}{dt} = g - \frac{\eta}{m}v \Rightarrow \frac{m}{\eta}\frac{dy}{dt} = y \qquad \frac{dy}{y} = \frac{\eta}{m}dt$

$$v(t) = \frac{g}{\eta}\left(1 - e^{-\frac{\eta}{m}t}\right) \underset{t \gg \frac{m}{\eta}}{\longrightarrow} \frac{g}{\eta} = v_{\lim ite}$$

Esercizio 5.2. Cosa succede se η=0?

5.3 La forza elastica



In Natura molte situazioni possono essere assimilate alla forza di richiamo di una molla. Se si sposta dalla posizione di riposo una molla di una quantità **x**, questa esercita una *forza di richiamo* che viene parametrizzata da:

$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{x} \qquad \text{(legge di Hooke)}$$

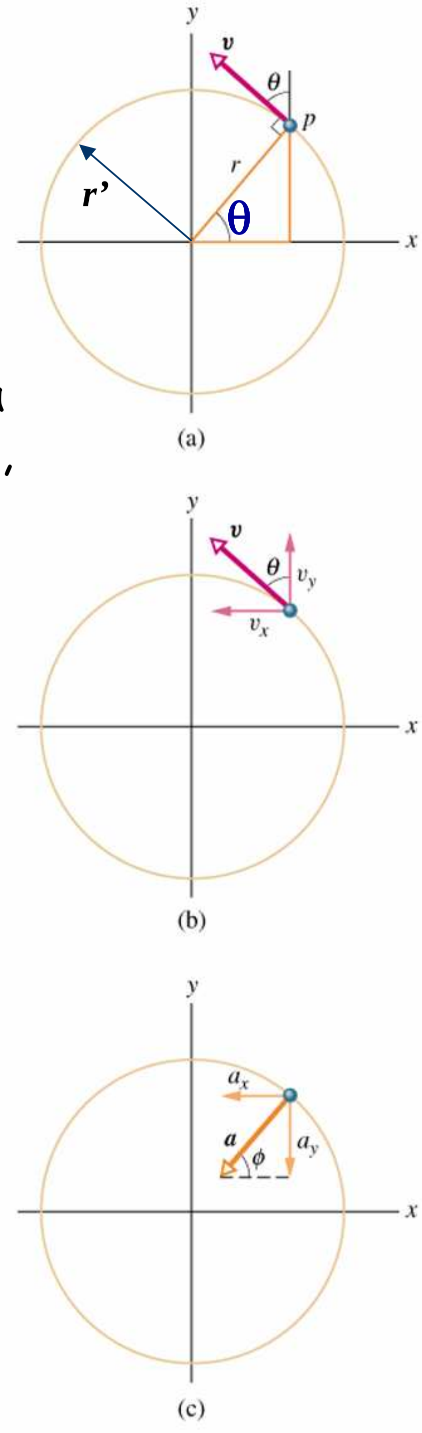
Esercizio 5.3. Descrivere il moto di un oggetto materiale allontanato di x_0 dall'equilibrio e soggetto ad una forza di richiamo elastica, *trascurando l'attrito.*

Soluzione: scriviamo l'equazione del moto: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

La funzione che soddisfa questa equazione è:

$$x(t) = x_o\cos(\varpi t), \quad \text{con} \quad \varpi = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

5.4 Il moto circolare uniforme



Un moto si chiama ***circolare uniforme***, se archi di circonferenza θ della stessa grandezza, vengono spazzati in tempi uguali (ossia, con velocità in modulo costante). Quindi, per definizione

$$d\theta/dt = \text{cost} = \omega$$

In Natura molte situazioni sono equiparabili a questo moto (i pianeti attorno al Sole, gli elettroni negli atomi…).

Nel caso della figura, le componenti del moto sono descritte dalle eq:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r\cos(\varpi\, t) \\ y(t) &= r\sin(\varpi\, t) \end{aligned}}$$

Ciò significa che a t=0 → **x(0) = r, y(0)=0**

Velocità nel moto circolare uniforme

Esercizio 5.4: Come scrivereste le coordinate del vettore **r'** *ruotato di +90° (senso antiorario) rispetto ad* **r**?

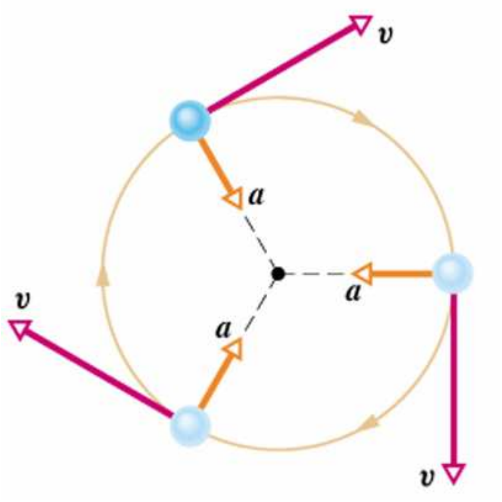
Nel Moto circolare uniforme, la **velocità cambia istantaneamente** di direzione, ed è sempre perpendicolare al raggio.

$$v_x(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -r\varpi\,\mathrm{sen}(\varpi\,t)$$

$$v_y(t) \equiv \frac{dy}{dt} = r\varpi\cos(\varpi\,t)$$

Esercizio 5.5 Mostrare l'affermazione precedente.
Soluzione: Provare a calcolare il prodotto scalare **r•v**.

Poiché vi è variazione di velocità (anche se il modulo della velocità rimane costante), vi e' accelerazione !!
Ossia, **deve** esserci una **forza** che deflette continuamente il vettore **v**



Accelerazione nel Moto Circolare Uniforme

$$a_x(t) \equiv \frac{dv_x}{dt} = -r\varpi^2 \cos(\varpi t) = -\varpi^2 x$$

$$a_y(t) \equiv \frac{dv_y}{dt} = -r\varpi^2 \mathrm{sen}(\varpi t) = -\varpi^2 y$$

Nel moto circolare uniforme, deve esistere una accelerazione che continuamente ***deflette*** il moto. L'accelerazione deve essere **radiale**, verso il centro e di modulo:

$$\mathbf{a = r\omega^2 = v^2/r}$$

L'accelerazione sarà dovuta ad una forza esterna. Questa forza si chiama ***centripeta***, e sarà dovuta a qualche fenomeno fisico (ad es. l'attrazione tra pianeti, o la forza elettrostatica attrattiva tra protoni ed elettroni).

Poiché la particella non cade nel centro, la forza centripeta è esattamente controbilanciata dalla forza **centrifuga**, di modulo pari a $\mathbf{F_C = mr\omega^2 = mv^2/r}$

In altri termini, si ha un moto circolare uniforme qualora una forza centrale (gravitazionale, Coulombiana) venga esattamente bilanciata dalla forza centrifuga. In seguito: moto di pianeti, atomo…

6. Il Lavoro e l'energia

Lavoro, energia cinetica e energia potenziale

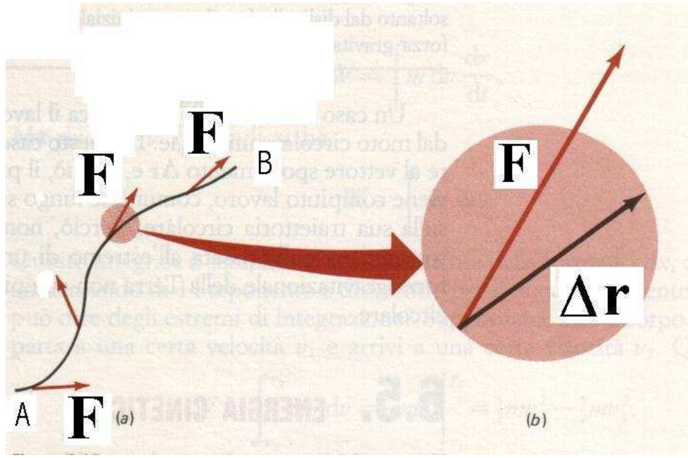
- Di seguito, definiremo alcune nuove grandezze fisiche **scalari**: il ***lavoro***, ***l'energia cinetica*** e ***l'energia potenziale.***
- (Il lavoro è l'integrale su un percorso, del prodotto scalare tra la forza e uno spostamento infinitesimo sul percorso.)
- Troveremo che, grazie alla II legge di Newton, potremo calcolare il lavoro di una forza tra due punti nello spazio, come la variazione di energia cinetica tra i due punti.
- Infine troveremo che, per alcune forze dette conservative, il *lavoro non dipende dal (percorso) cammino scelto.*
- In questo caso, è definita una nuova grandezza (***l'energia potenziale***) che dipende dai soli punti di arrivo e partenza.
- Nel caso delle forze conservative, la somma di ***l'energia cinetica*** e ***l'energia potenziale (=energia)*** sono costanti del moto (ossia, l'energia è la stessa in tutti i punti del percorso).

Il Lavoro di una forza

1- Supponiamo di conoscere la forza **F** in tutti i punti di una regione di spazio (=campo di forze)

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)$$

2- Consideriamo una curva nello spazio che connetta i punti A e B



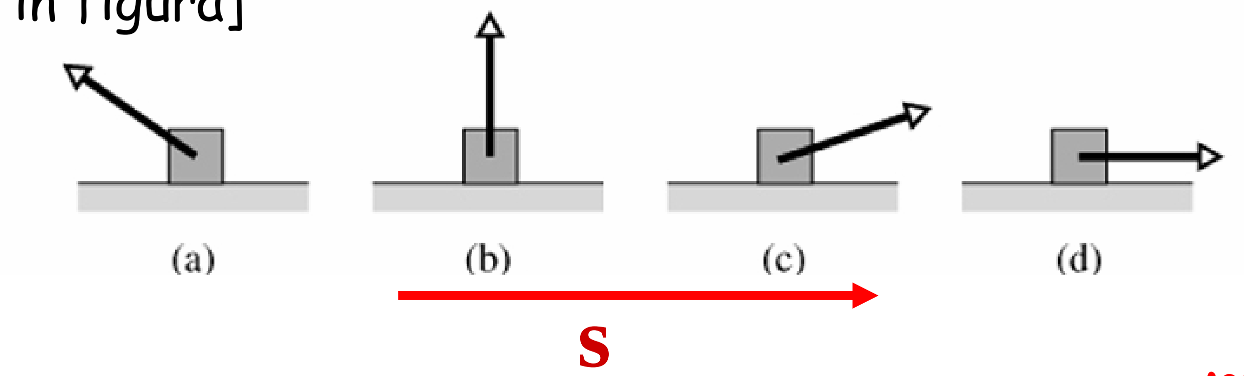
Possiamo **DEFINIRE** una nuova grandezza fisica, come l'integrale del prodotto scalare tra la **forza** ed un **elemento infinitesimo di curva**. L'integrale è sempre *calcolabile*, ed il risultato è uno **scalare**

$$\boxed{L \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{s}}$$

La nuova grandezza si chiama **lavoro**, e si misura in (Newton• Metro) = **Joule**

Casi semplici: spostamento unidimensionale e…

1- Forza costante e parallela allo spostamento [caso (d) in fig.]
2- Forza costante e normale allo spostamento [(b) in fig.]
3- Forza costante ad angolo fisso rispetto allo spostamento [casi (a,c) in figura]

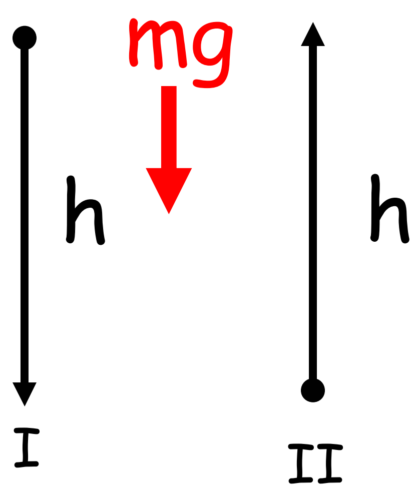


4- Lavoro svolto dalla Forza peso $F_g=mg$:
Nel secondo caso sposto la massa m *verso l'alto* per un tratto lungo h:

$$L = mgh(\cos 180°) = -mgh$$

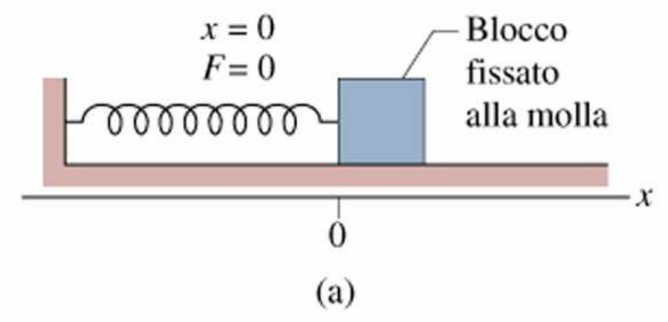
Nel primo caso, la massa m viene spinta verso il basso:

$$L = mgh(\cos 0°) = +mgh$$

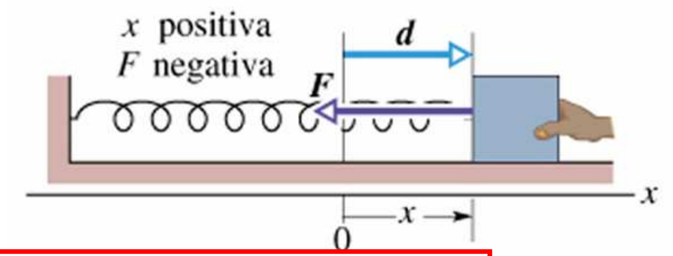


Es. 6.1 - Cosa succede se mi sposto di h in orizzontale?

Lavoro della forza elastica



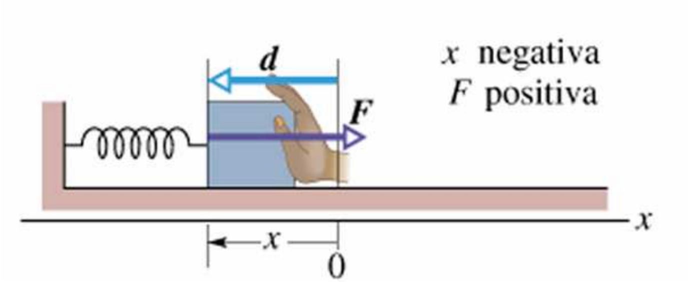
Allontaniamo un blocco (fissato con una molla) dalla posizione di equilibrio (forza negativa sull'asse x, spostamento positivo sull'asse x):



$$L \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\,\vec{s} \rightarrow \int_{x_o}^{x} (-ks) \cdot d\,s = \frac{1}{2}kx_o^2 - \frac{1}{2}kx^2 = numero \qquad (J)$$

Occorre fornire un lavoro dall'esterno per allontanare il blocco dalla posizione di riposo. Il lavoro è *negativo* se compiuto sulla molla.

Es. 6.2 - Cosa succede se sposto il blocco, comprimendo la molla?



Il lavoro è sempre calcolabile, note le forze

- In generale, il ***lavoro*** è una grandezza scalare (numero!) che ***è sempre calcolabile*** se la forza è nota (potranno eventualmente esserci problemi di calcolo, avremo bisogno di un calcolatore).
- Può succedere che il numero sia differente se il percorso scelto è differente.

Energia cinetica (Teorema delle forze vive)

In virtù della II Legge di Newton: $\mathbf{F}=m\mathbf{a}=md\mathbf{v}/dt$
il lavoro ha una importante proprietà:

$$L \equiv \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Definiamo ***energia cinetica*** la grandezza:

$$T \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

(Teorema delle forze vive): Il *lavoro* compiuto dalla risultante delle forze agenti su un punto materiale da "A" a "B" è uguale alla differenza tra l' ***energia cinetica*** posseduta dal punto nella posizione finale ed in quella iniziale:

$$\mathbf{L = T_B - T_A}$$

La potenza

Un lavoro può essere svolto in più o meno tempo. Per molti scopi questo aspetto è importante. La "rapidità" con la quale viene eseguito un lavoro si chiama ***potenza*** (rapporto di 2 quantità scalari=scalare):

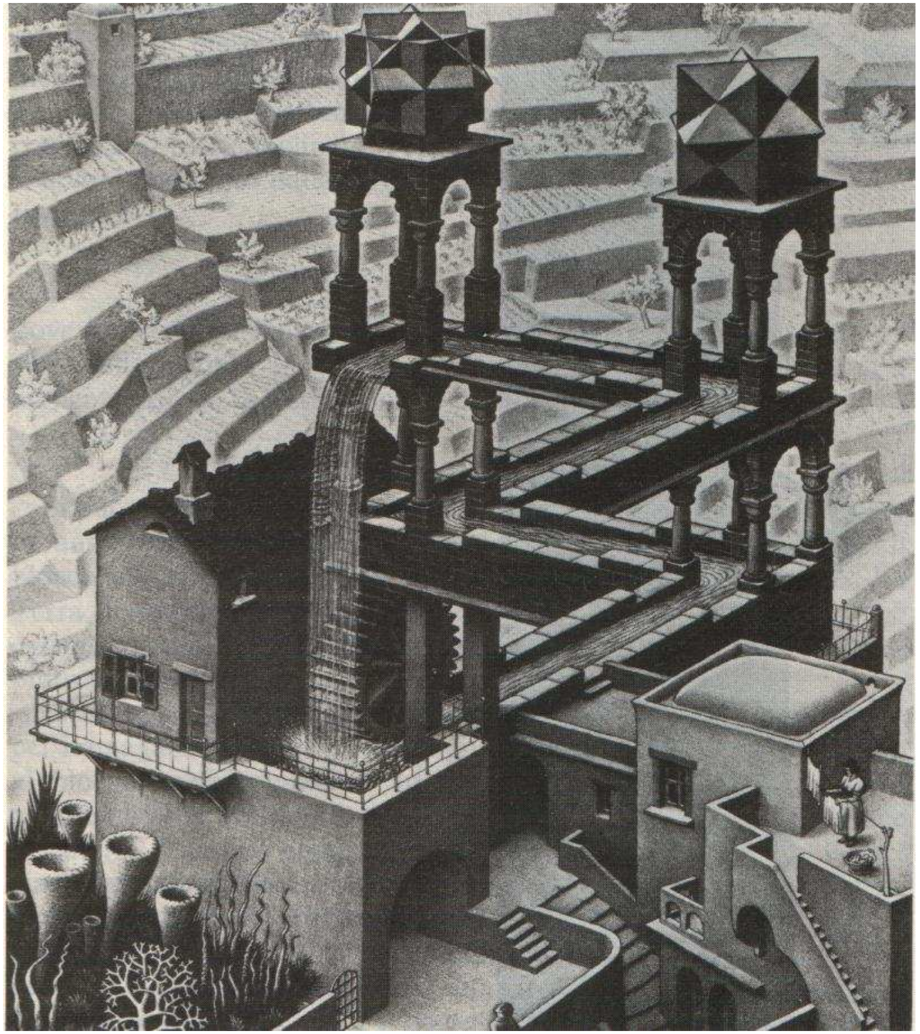
$$\boxed{P \equiv \frac{dL}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{s})}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

- Una forza non compie lavoro se la forza è perpendicolare allo spostamento (ovvero, forza e velocità ortogonali).
- $P>0$ se la forza e lo spostamento sono concordi: la forza esercita un lavoro
- $P<0$ se forza e spostamento sono discordi: occorre esercitare un lavoro esterno sul corpo per muoverlo contro la forza in questione.

La potenza nel SI si misura in Joule/s. Poiché è una unità molto comune:

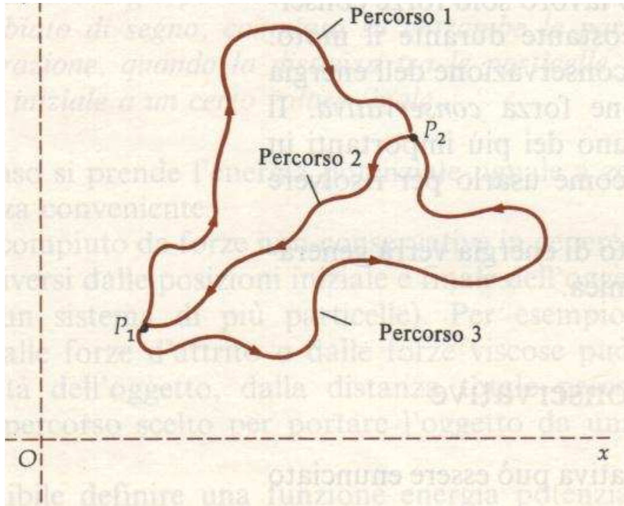
1 Watt = 1 joule/s

7. Legge della conservazione dell'Energia



Forze **conservative** e non

Supponendo di spostare il punto materiale dalla posizione P_1 a P_2 su diversi percorsi, troviamo che per *alcuni campi di forze* il lavoro **NON** dipende dal percorso scelto.



In questo caso, la forza e' detta **conservativa**. In caso contrario, il campo è non conservativo

In altri termini, il lavoro complessivo svolto da una forza conservativa su una particella che si muove su un percorso chiuso è zero.

Esempi di forze: quali sono convervative?

- Forza peso, $F_z = mg$
- Forza di tipo centrale, $\vec{F} = k\frac{\hat{r}}{r^2}$
- Forza di attrito
- $F_x = xy$; $F_y = y$; $F_z = 0$

Caso importante!

Energia Potenziale

Se (e solo se) **il campo di forze è conservativo**, allora è possibile definire una funzione scalare della sola posizione, l' **Energia Potenziale U(r).** Il lavoro della forza dipende solo dalla variazione dei valori della funzione U(r) tra i punti iniziale e finale.

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \equiv -[U(B) - U(A)] = -\Delta U$$

Esempi:

- Forza peso, U=mgz
- Forza di tipo centrale, $U = -k\dfrac{1}{r}$

• In generale, la funzione **energia potenziale U(r)** deve essere determinata problema per problema **!**

•Se tiene fissa la posizione di partenza (ad es., nell'origine del SiRCO o ad una distanza ∞ dall'origine), la **funzione energia potenziale dipende solo dal punto di arrivo**.

• In tal caso, U(r) è definita a meno di una costante additiva (arbitrarietà della posizione di partenza).

Energia Meccanica

Definiamo ***energia meccanica*** **E** la somma di energia cinetica T ed energia potenziale U:

$$E = T + U$$

-L'energia totale E di un sistema può variare solo se viene trasferita *energia dal (al) di fuori* del sistema. Se questo non può avvenire, il sistema si chiama ***isolato***.

- In un sistema isolato, ***<u>l'energia meccanica si conserva.</u>***

Legge di conservazione dell'energia meccanica

- **Teorema delle forze vive**: il lavoro svolto dalle forze eguaglia la variazione di energia cinetica: $\mathbf{L=T_2-T_1}$

- **Se** il campo di forze è **conservativo**, $\mathbf{L=U_1-U_2}$

- allora la quantità: $\mathbf{E \equiv U_2+T_2 = U_1+T_1}$
  rimane costante lungo tutta la traiettoria del moto

-La legge della conservazione dell'energia meccanica è molto importante e verrà generalizzata.
- E' una legge predittiva (possiamo ricavare informazioni)

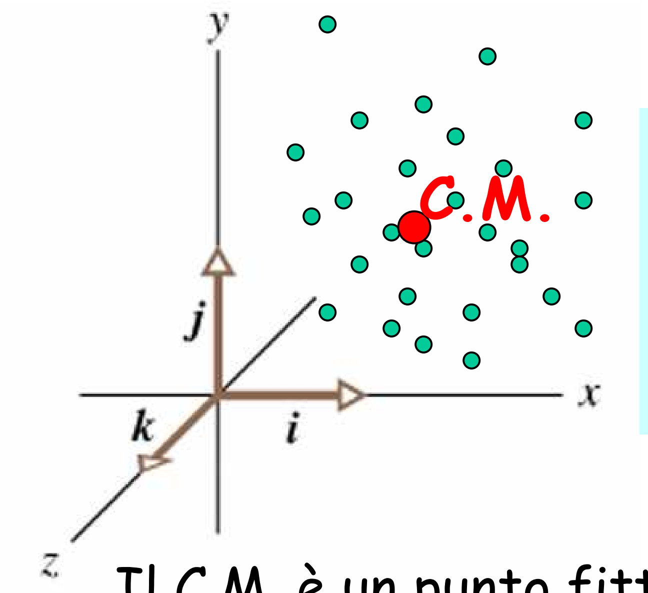
Es. 7.1 – A quale velocità deve essere sparato un razzo sulla superficie terrestre in modo che riesca a fuggire all'attrazione della Terra?

8. Sistemi di punti, quantità di moto e urti

Centro di massa

Come si muove un "insieme" di punti?
Cos'è un "corpo rigido"? Occorre definire il ***centro di massa***.
Mostreremo l'equazione che governa il moto del centro di massa

Consideriamo un insieme di punti in un SiRCO. Si definisce



Centro di Massa (C.M) il punto di coord:

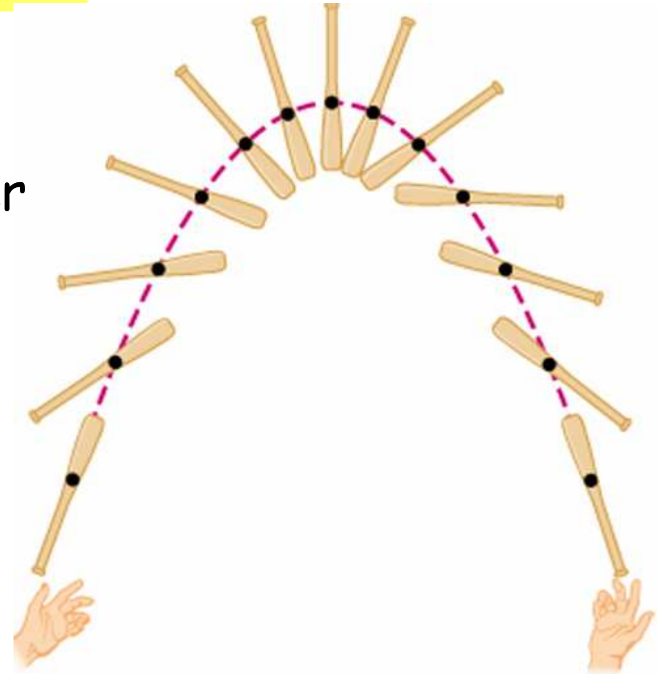
$$x_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \quad y_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \quad z_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Il C.M. è un punto fittizio che può corrispondere a nessun punto reale.

$$\boxed{\vec{r}_{c.m.} \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Corpi rigidi

Un Corpo rigido è composto da costituenti la cui **distanza relativa non cambia**. La distanza viene mantenuta costante da ***Forze Interne***. Anche per un corpo rigido può essere definito il C.M., sostituendo il denominatore con la massa M del corpo, ed il numeratore da un'integrale.
(Un corpo rigido è costituito infatti da un numero così grande di punti che può essere considerato come una distribuzione continua di massa.)



Equazione del Moto per i Corpi Rigidi

$$\boxed{\vec{F}_{net} = M \cdot \vec{a}_{c.m}}$$

Accelerazione del ***C.M.***

Somma vettoriale di tutte le ***Forze Esterne***.

Dimostrazione: alla lavagna.

Quantità di moto

Si definisce quantità di moto di un oggetto la grandezza:

$$\boxed{\vec{p} \equiv m \cdot \vec{v}}$$

Si definisce quantità di moto di un sistema di N punti:

$$\boxed{\vec{p} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i}$$

La quantità di moto è una grandezza fisica importante. Infatti, se sul sistema di punti ***non agiscono forze esterne*** (ma solo interne) la <u>*quantità di moto del sistema non varia (si conserva)*</u>

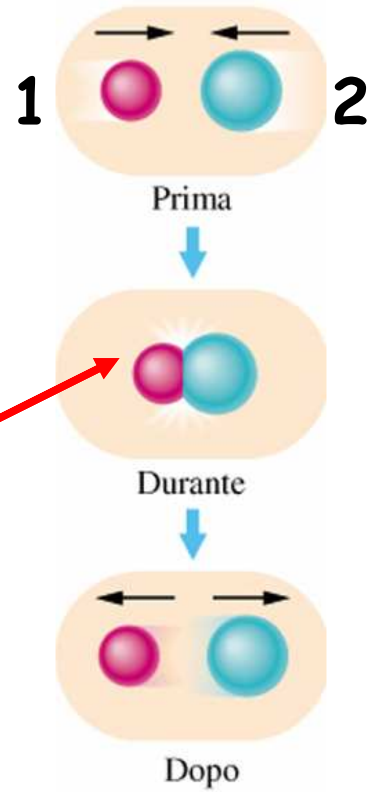
$$\boxed{\vec{p} = \text{costante}}$$ (sistema chiuso e isolato)

Dim: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{\text{int}} = \vec{F}_{ext}$$

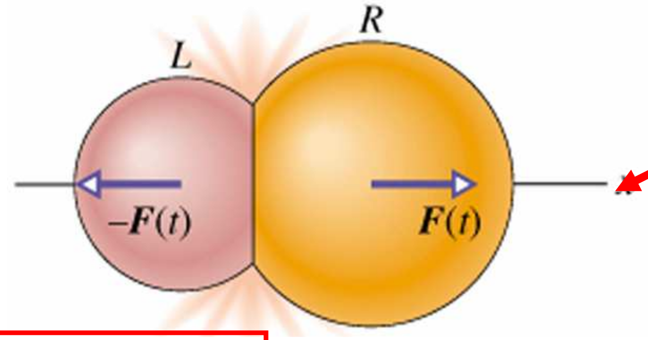
Urti

La quantità di moto è utile per studiare gli **urti**. Un **urto** è un evento nel quale una forza agisce per un tempo relativamente breve, su ciascuno di due corpi in contatto.

Sistema **chiuso** e **isolato**



In un sistema chiuso ed isolato, la quantità di moto *P* resta invariata.

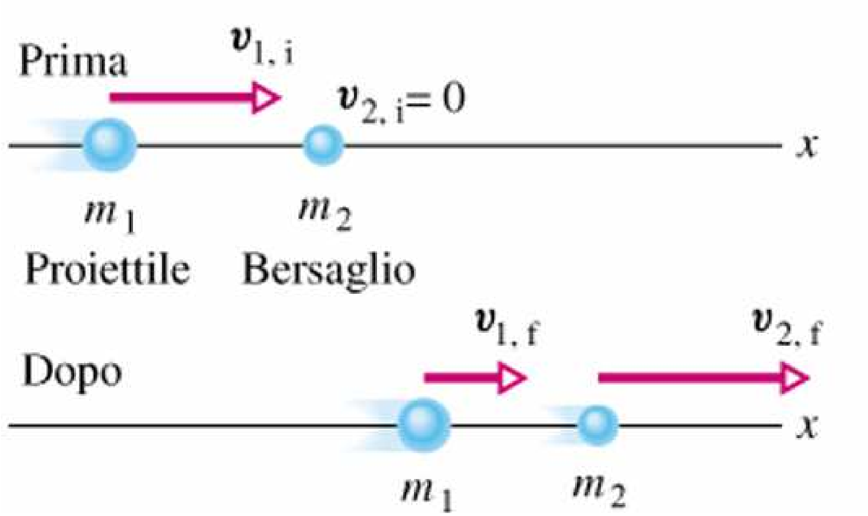


$$\boxed{\vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f}}$$

Se nell'urto tra due corpi *l'energia cinetica totale non cambia*, l'urto si chiama **elastico**. Negli usuali urti tra oggetti comuni, una certa porzione di energia si trasferisce da cinetica ad altre forme. In questi casi, l'urto si chiama **anelastico**.

Esempio: urti uni-dimensionali

Urto elastico

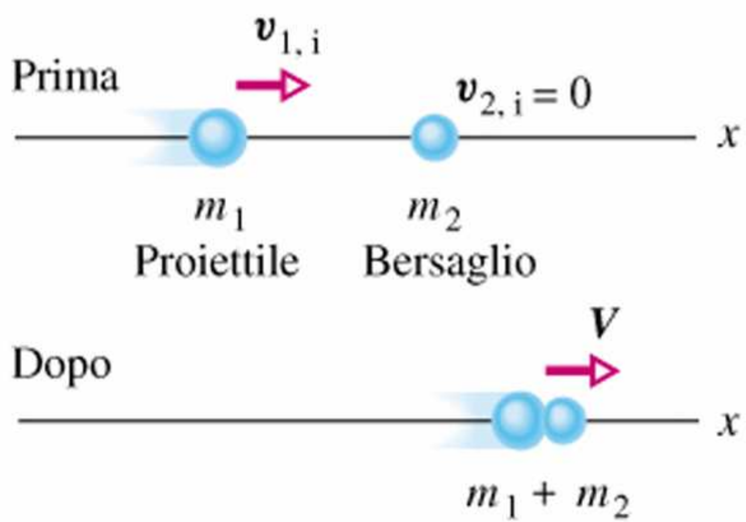


$$m_1 v_{1,i} + 0 = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2$$

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} ; v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i}$$

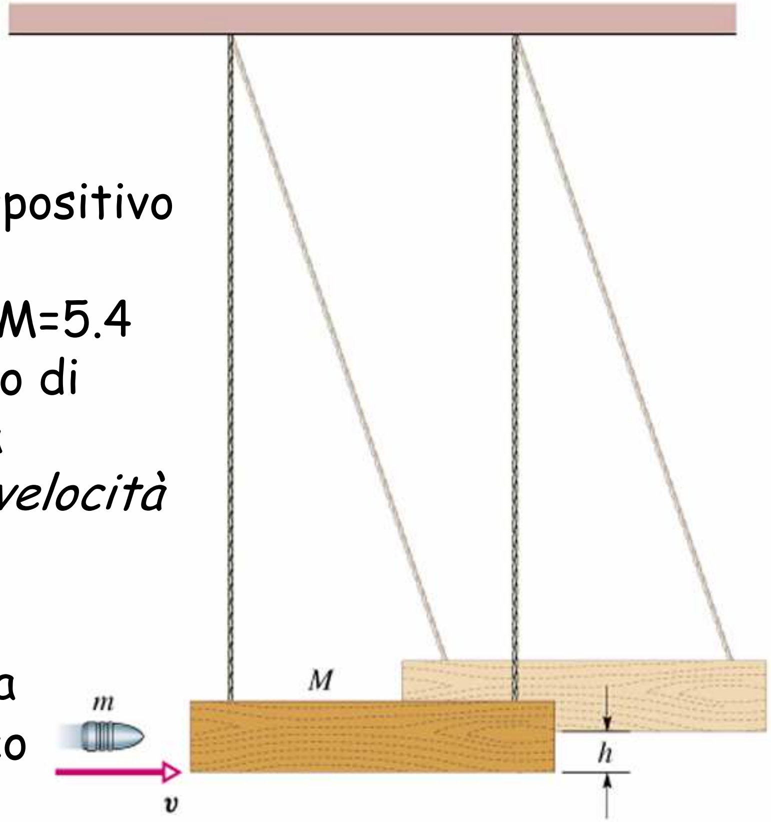
Urto completamente anelastico



$$m_1 v_{1,i} + 0 = (m_1 + m_2) V$$

$$V = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_{1,i}$$

Esempio: il pendolo balistico



Esercizio 8.1: Il pendolo balistico era un dispositivo usato per misurare la velocità dei proiettili. Assumendo che la massa del legno in figura sia M=5.4 kg, quella del proiettile che si arresta nel blocco di legno m=9.5 g, e che il pendolo si sollevi per una distanza verticale di h=6.3 cm, *determinare la velocità del proiettile prima della collisione.*

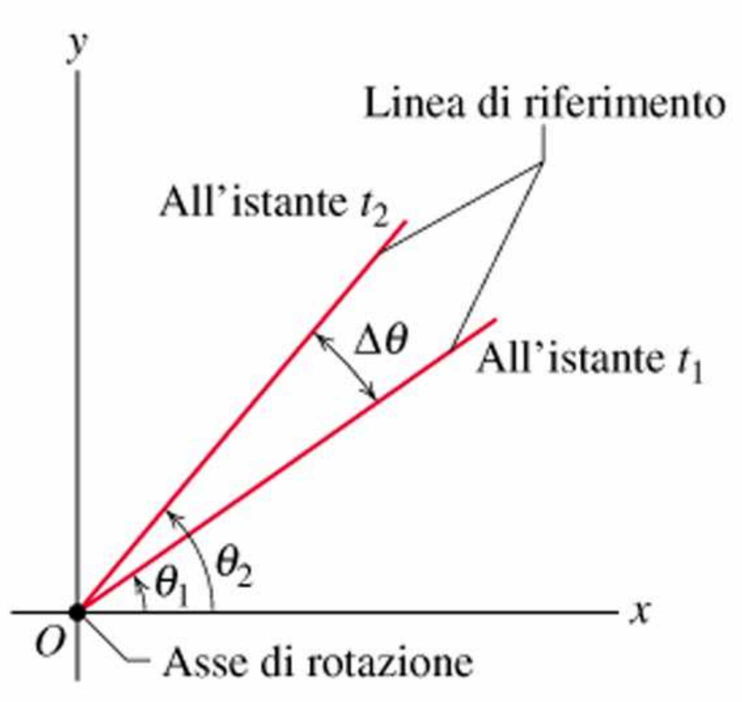
Risoluzione. Occorre suddividere il problema in due parti: (1) l'urto completamente anelastico tra proiettile e legno, e (2) l'innalzamento del blocco contro la forza di gravità.

Dopo l'urto, la velocità complessiva del blocco è V=mv/(m+M).
Per innalzamento, l'energia cinetica del sistema [1/2 (m+M)V^2] si trasforma in energia potenziale gravitazionale [(m+M)gh], da cui si ricava:

$$\boxed{v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} = 630 m/s}$$

9. Grandezze angolari; Momento di una forza; Momento Angolare

Grandezze angolari



Posizione angolare: misurata in **radianti**

θ= lunghezza arco/raggio=s/r

Spostamento angolare:

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Velocità angolare:

$$\boxed{\varpi = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$$

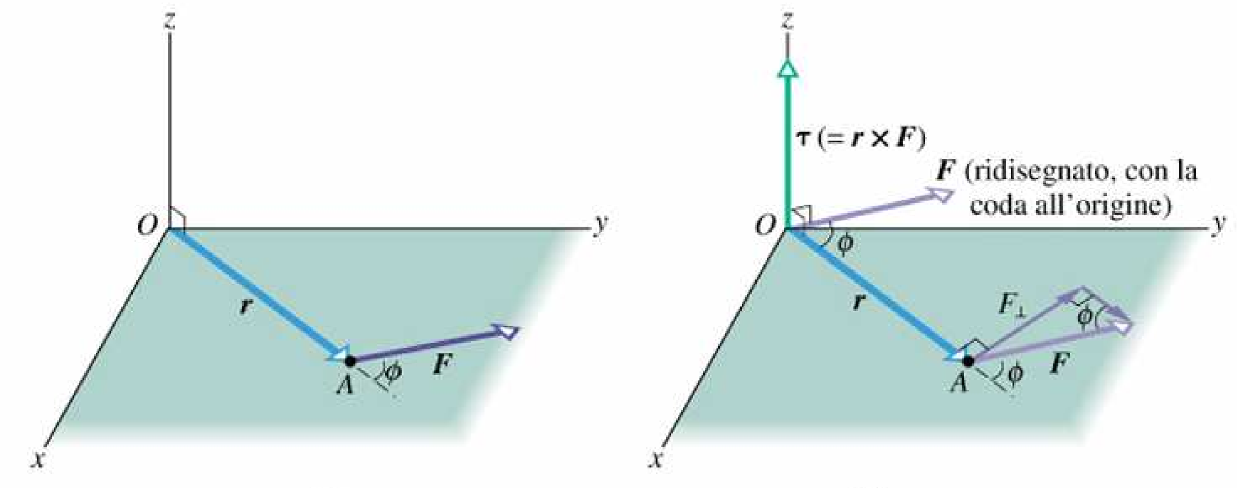
Nel caso in cui la posizione angolare varia in modo costante ($s=r\theta$), la velocità angolare ω è costante (moto circolare uniforme). La velocità del punto è semplicemente: **v=ds/dt = ωr**

Il **periodo** è semplicemente:

(lunghezza circonferenza/velocità) =2π**r/v** =$2\pi/\omega$

Momento di una forza

Empiricamente, sappiamo che è più semplice aprire una porta vicino alla maniglia, piuttosto che in prossimità dei cardini, anche con la stessa forza.



(a) (b)

Perché si causi una *rotazione*, non solo è necessaria una forza, ma anche che sia *applicata* in un punto conveniente. *Definiamo* il **momento della forza** la grandezza:

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

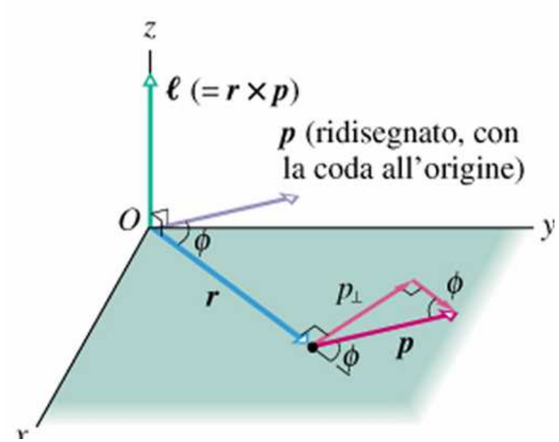
il modulo è $\tau = rF \sin\Phi$, direzione normale al piano di **r** e **F** .

Condizione perché un corpo venga messo in rotazione, è che vi sia un momento della forza non nullo.

Es. 9.1 *Mostrare che nel caso di una forza centrale, il momento della forza e' nullo.*

Momento angolare

Il concetto di quantità di moto, e la sua conservazione, ci consentono di ***prevedere*** gli effetti di una collisione, senza conoscerne la *dinamica* in dettaglio. La nuova grandezza che introduciamo (il momento angolare) è soggetto ad una analoga legge di conservazione.



Consideriamo una particella con quantità di moto **p**=m**v**. Possiamo definire il momento angolare (o momento della quantità di moto):

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Vettore ortogonale al piano di **p** e **r**, e di modulo **pr** senΦ

Momento angolare di un sistema di particelle

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_N = \sum_{i=1,N} \vec{\ell}_i$$

Relazione tra $\bar{\tau}$ e $\bar{\ell}$

Tra momento della forza e momento angolare, esiste una relazione analoga alla II legge di Newton **F** =d**p**/dt

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

<u>Dimostrazione</u>:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{a} + 0) =$$

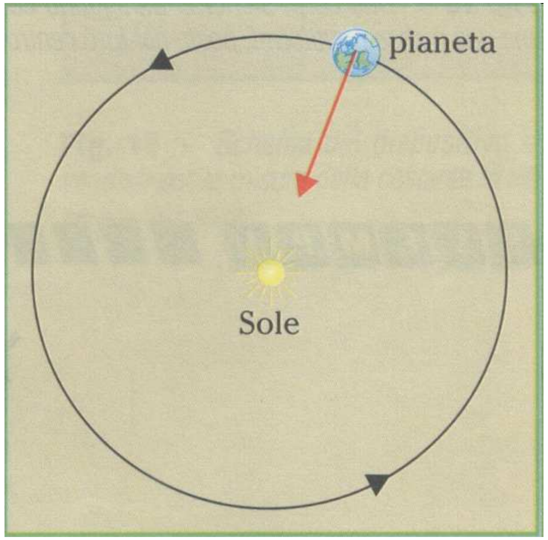
$$= (\vec{r} \times m\vec{a}) = \vec{\tau} \qquad c.v.d.$$

Una variazione del momento angolare induce un momento della forza, che provoca una rotazione di un oggetto (sistema)

Momento angolare e forze centrali

• Un caso importante e' *quando la forza e' di tipo centrale* **F=F(r)**
• In tal caso infatti, il momento τ della forza e' nullo, e quindi:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\ell} = \text{cost}$$



(Vedremo avanti che la forza gravitazionale è una forza centrale)

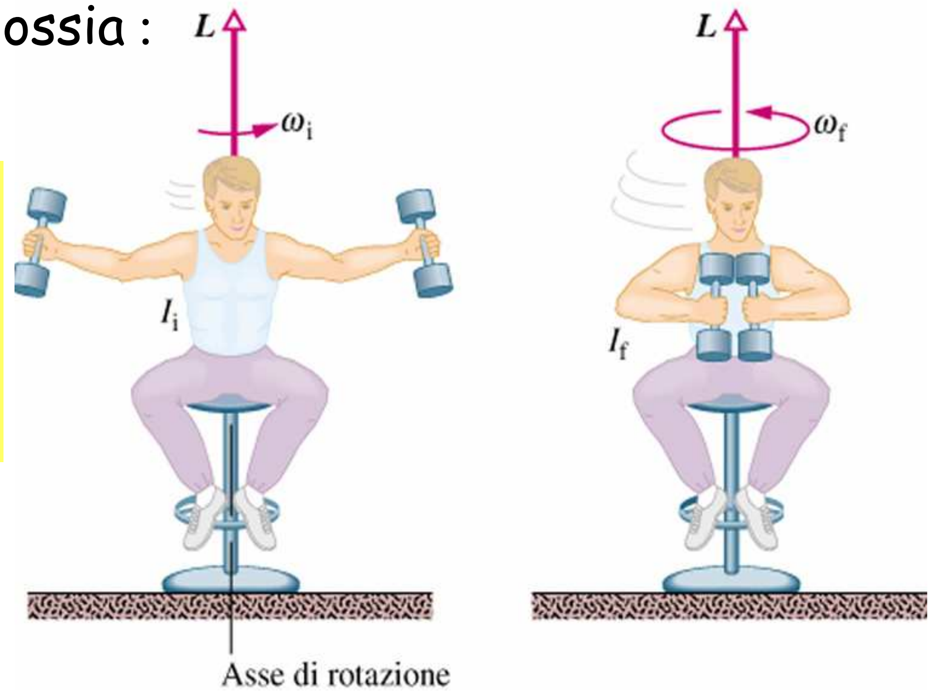
Il momento angolare e' **costante** in *intensità, direzione e verso.*

Nota: In alcuni testi, il "momento angolare" viene chiamato "momento della quantità di moto"

Conservazione del momento angolare

Se il momento netto delle forze agenti su un sistema è nullo, allora si ha d**L**/dt = 0, ossia :

L = costante (sistema isolato) indipendentemente dai cambiamenti che intervengono all'interno del sistema.



Per la natura vettoriale di τ , se una componente e' nulla, allora la componente di ℓ lungo quella direzione rimane costante, indipendentemente dalle altre.

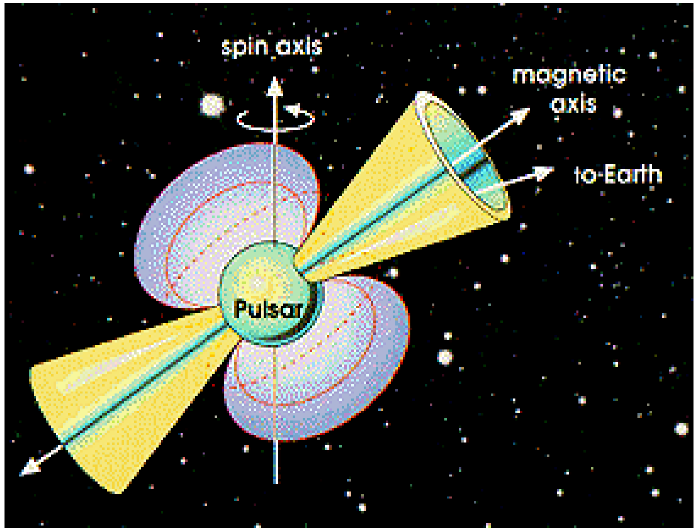
Implicazioni in astrofisica: pulsar

La conservazione del momento angolare ha importanti conseguenze anche in Astrofisica: una pulsar e' oggetto di raggio R~ 10 km che rimane dopo la morte di una stella. Poiché le Stelle come il Sole ($r_{sun}=10^9$m,) ruotano (T_{sun}=30 giorni), si ha:

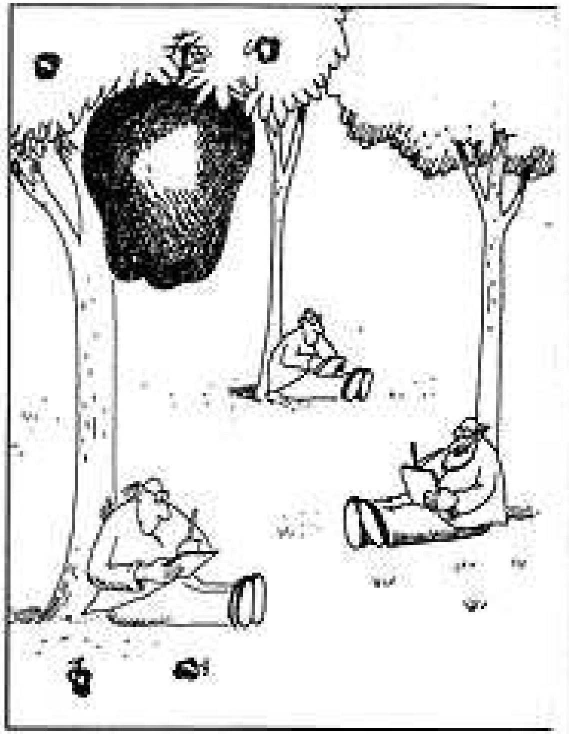
$$m\varpi_{Star}r^2{}_{Star} = m\varpi_{pulsar}r^2{}_{pulsar}$$

$$\varpi_{pulsar} = \left(\frac{r_{star}}{r_{pulsar}}\right)^2 \varpi_{Star} \sim \left(\frac{10^9}{10^4}\right)^2 \varpi_{Star}$$

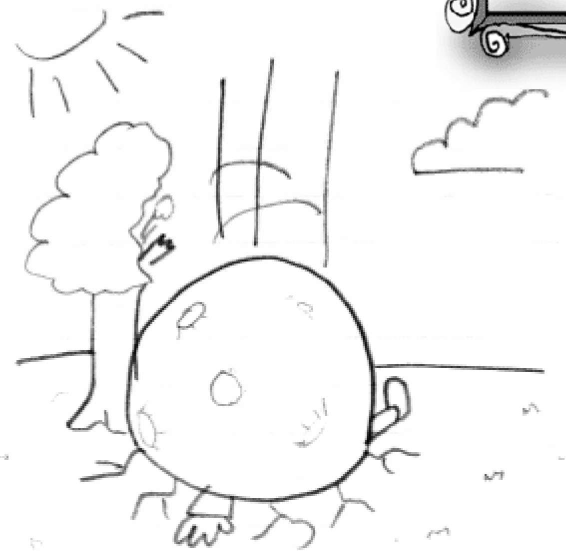
$$T_{pulsar} = 10^{-10} T_{Star} = 10^{-10} \cdot 3\times10^6 s = 0.3ms$$



10. Gravitazione Universale



"Nothing yet. ...How about you, Newton?"



Newton discovers planetary motion.

Sinora, abbiamo parlato di grandezze ***cinematiche*** (velocità, accelerazione) e di grandezze ***dinamiche*** (forze,..). Abbiamo trovato la relazione tra queste grandezze (Leggi di Newton, leggi di conservazione). Rimane una domanda:

Che cosa origina le forze?

E' questo il problema che deve risolvere la fisica; sino a poco tempo fa' si conoscono 4 tipi di forze *fondamentali*:

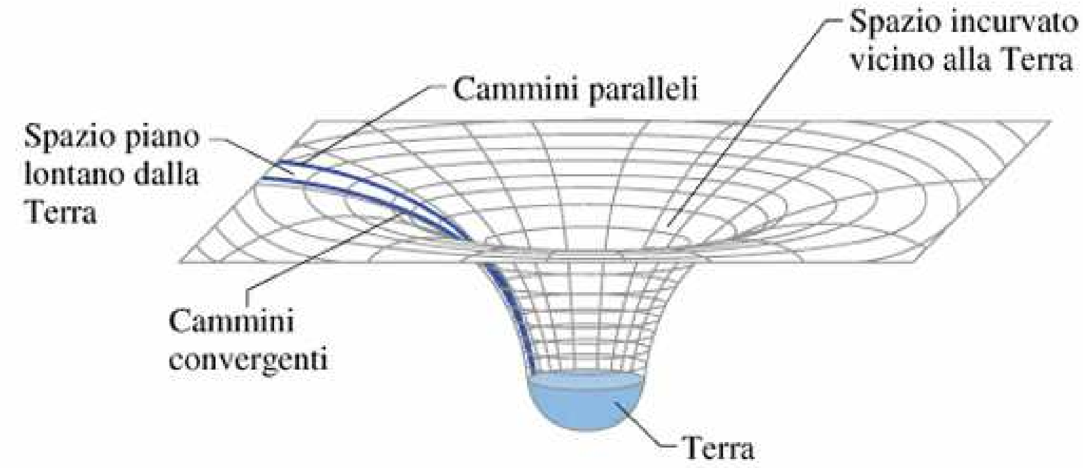
- **Forza gravitazionale**, originata dalle **masse**;
- **Forze elettromagnetiche**, originate dalle **cariche elettriche e dal loro moto;**
- **Forze forti,** all'interno dei protoni (e altri *adroni*), originate da ***cariche di colore***;
- **Forze deboli**. Regolano le reazioni nelle stelle

[Negli anni '70, si e' compreso che le forze deboli e le forze elettromagnetiche sono aspetti diversi dello stesso meccanismo]

- L'Uomo per primo ha avuto ***esperienza*** coi fenomeni gravitazionali.

La Forza Gravitazionale.

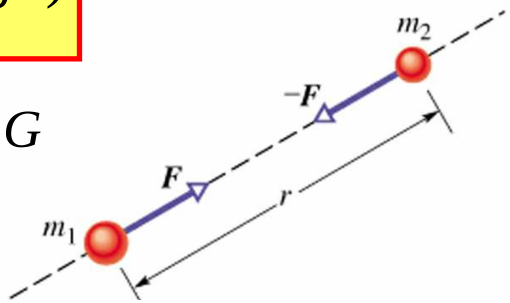
[In termini di fisica moderna, si pensa che una massa possa *deformare la geometria* dello spazio-tempo. Anche se matematicamente complicato, questo concetto ha una semplice rappresentazione nel caso bidimensionale!]



Tutto si basa sull'osservazione che le masse si attraggono! Non solo oggetti vengono attratti dalla Terra (caduta libera) ma anche la Luna e' attratta (e cade!!) sulla Terra. *I. Newton* (1665) formulo' la Legge di Gravitazione Universale:

$$\boxed{\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad G = 6.67\cdot 10^{-11}\ \ (Nm^2/kg^2)}$$

m_1 ed m_2 rappresentano le masse, r la distanza mentre G e' la costante Gravitazionale (da misurare sperimentalmente)

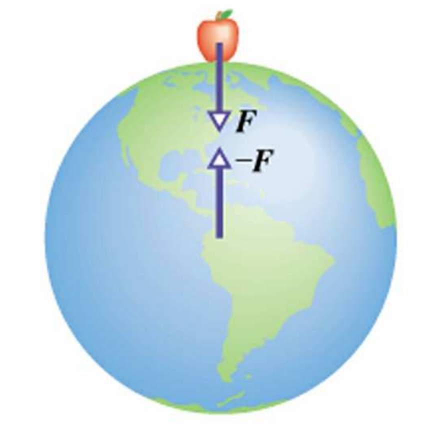


Gravita' sulla superficie Terrestre

In realtà, la mela attrae la Terra così come la Terra attrae la mela (III Legge). Tuttavia, gli effetti sono più evidenti sulla mela, in quanto **l'accelerazione** (II legge) sulla mela e' molto più grande, mentre e' trascurabile per la terra.
Provare a verificarlo!

[La cosa difficile da mostrare, e' che se la materia si distribuisce uniformemente a gusci, allora e' **come se** tutta la massa fosse concentrata nel suo centro. Newton invento' il calcolo integrale per risolvere questo problema!]

Noi conosciamo gia' che i corpi cadono in prossimita' della superficie Terrestre con una accelerazione costante verso il basso: F=mg. E' compatibile tale legge con la Legge di Gravitazione Universale?
Supponiamo m_2= massa terra, r_T=6300 km



“pesiamo” la Terra = massa della Terra

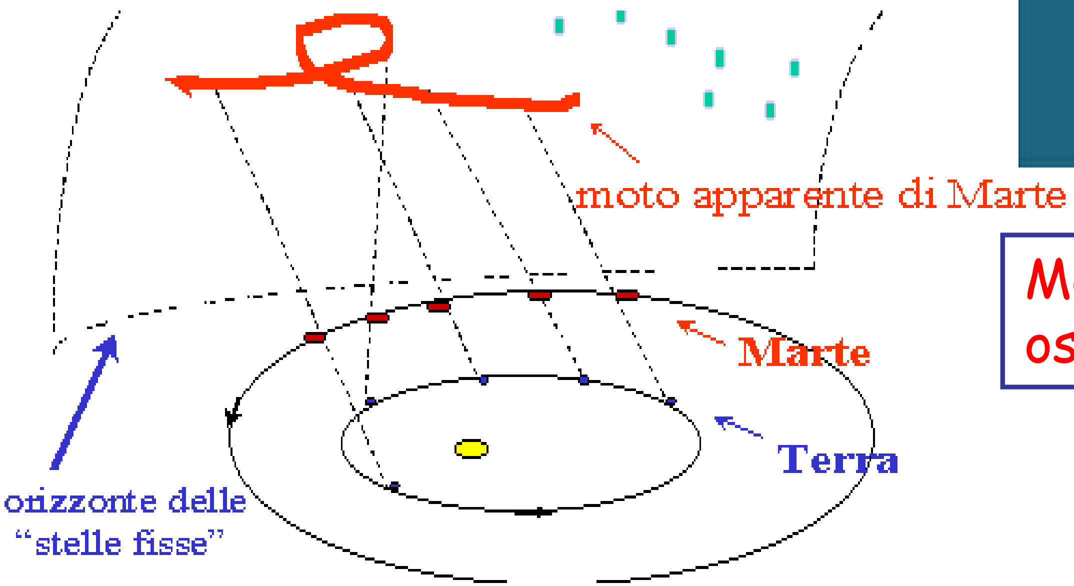
$$F = G\frac{mm_T}{(r_T + h)^2} \approx \left(\frac{Gm_T}{r_T^{\,2}}\right)m = mg$$

$$g = \left(\frac{Gm_T}{r_T^{\,2}}\right) \Rightarrow m_T = \frac{gr_T^{\,2}}{G} = \frac{9.8\times(6.3\cdot 10^6)^2}{6.67\cdot 10^{-11}} = 5.8\cdot 10^{24}\,kg$$

(Trascuriamo h rispetto a r_T ; la direzione sara’ sempre perpendicolare alla superficie terrestre)

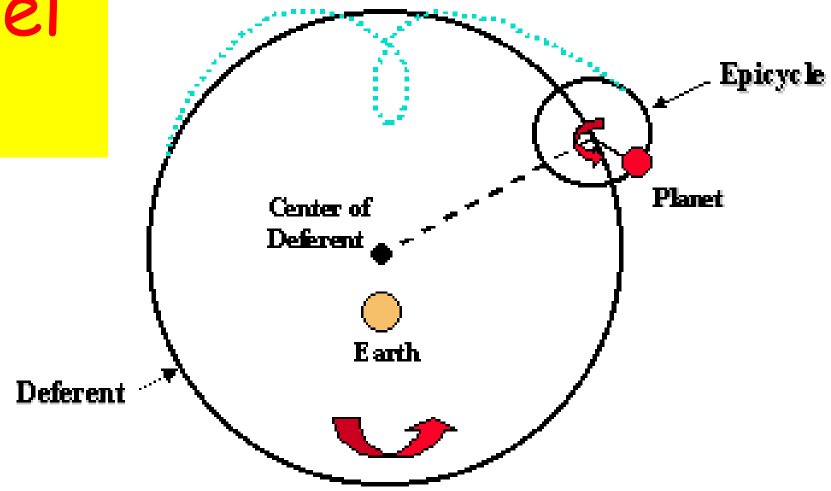
La cinematica dei pianeti

Sin dall'antichità l'Uomo ha studiato il moto degli oggetti celesti. Il moto di questi risultava estremamente complicato, a **causa principalmente di pregiudizi** che condizionavano la scelta del sistema di riferimento.



Moto apparente di Marte osservato dalla Terra nel 1971

Osservazione *cinematica* del Sistema Solare



•**Tolomeo** (120 a.C.): origine del Sistema di riferimento: ***Terra***. Composizione di ***moti circolari***

•**Copernico** (1500): origine del S. di riferimento: ***Sole***. Composizione di ***moti circolari***

•Osservazioni ***sperimentali*** di Tycho **Brahe** (1546-1601)

• **Keplero** (1600):origine del S. di riferimento: ***Sole***. Orbite dei pianeti ***ellittiche***

Le leggi di Keplero provengono da misure di cinematica. Tuttavia, esse

permettono una interpretazione dei dati in termini di legge *dinamica*

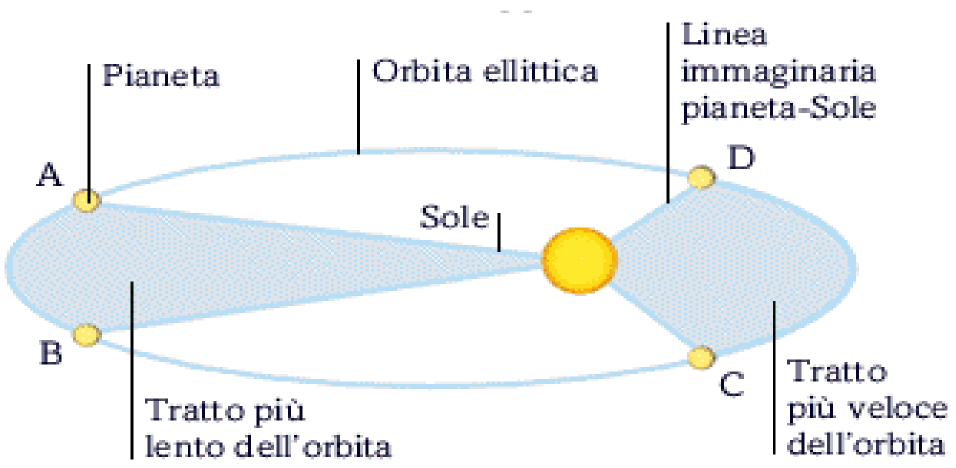
In pratica, si tratta di un complesso problema inverso di cinematica: ***avendo le informazioni sul moto dei pianeti, possiamo ricavare informazioni sulla natura di*** F ? **SI**

Le 3 leggi di Keplero:

1- Le orbite dei pianeti sono *i)* **piane** (ciascun pianeta la propria) e *ii)* **sono di forma ellittica,** con un fuoco occupato dal Sole.

2- Il raggio vettore dal Sole al pianeta **descrive aree proporzionali ai tempi impiegati** a descriverle (velocità areolare costante)

3- **I quadrati dei periodi *T*** di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole sono proporzionali ai **cubi del semiasse maggiore *a*** delle rispettive orbite ellittiche, $T^2 \propto a^3$

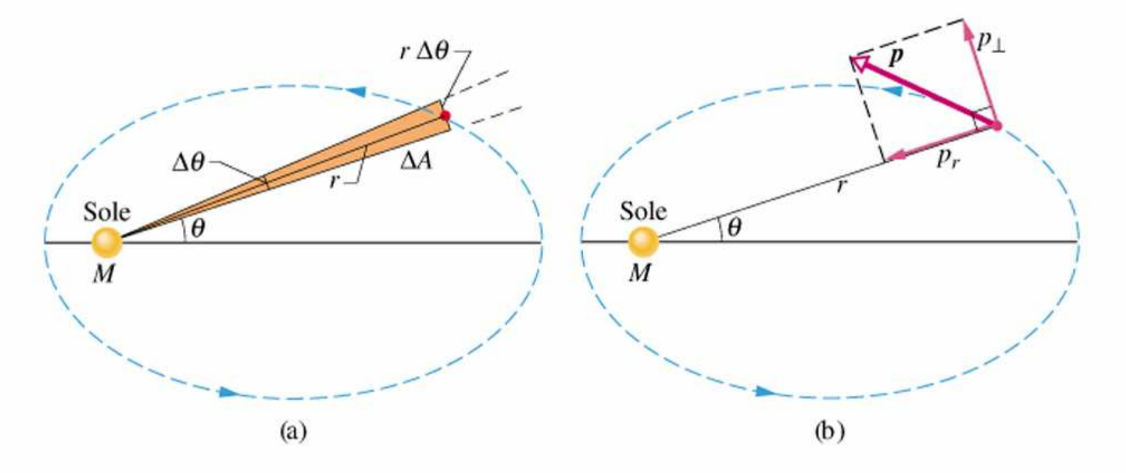


Interpretazione in termini di legge *dinamica*

La prima parte della I Legge (orbite piane) di Keplero, e la II Legge <u>implicano che la Forza e' di tipo centrale:</u>

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\,(\mathbf{r})$$

Un orbita piana implica che il vettore velocita' giaccia in un piano. Questo e' vero se il ***vettore momento angolare*** $\boldsymbol{\ell}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ ***e' costante***. Se la direzione di ℓ e' costante, v e' in un piano



Forza e' di tipo centrale → conservazione del momento angolare (modulo, direzione, verso).

Conservazione del modulo → **II Legge di Keplero**

Se *ℓ=r×p* ***e' costante in modulo,*** si ha la legge delle aree. Infatti:

$$\ell = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = \mathrm{rpsin}\theta = \mathrm{rp}_\perp$$

$$= rmv_\perp = m\omega r^2$$

Consideriamo ora l'area ΔA in arancio in figura:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r \cdot (r\Delta\theta)$$

(Questa relazione diviene esatta quando Δt (ossia Δθ) tende a 0)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \varpi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\mathrm{l}}{2m} = \mathrm{cost}}$$

La terza legge di Keplero

Terza legge di Keplero per il sistema solare

Pianeta	Semiasse maggiore a (10^{10} m)	Periodo T (a)	T^2/a^3 (10^{-34} a^2/m^3)
Mercurio	5.79	0.241	2.99
Venere	10.8	0.615	3.00
Terra	15.0	1.00	2.96
Marte	22.8	1.88	2.98
Giove	77.8	11.9	3.01
Saturno	143	29.5	2.98
Urano	287	84.0	2.98
Nettuno	450	165	2.99
Plutone	590	248	2.99

Dalla terza legge di Keplero, possiamo ricavare che la forza tra Sole e pianeti deve essere **inversamente proporzionale al quadrato della distanza**. Per semplicità assumiamo che le orbite siano circolari, ed utilizziamo la condizione di stabilità dell'orbita (par. 5.4):

$$F_c = m\varpi^2 r$$

$$F_N = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Si noti che dal valore sperimentale di r^3/T^2 si può determinare il prodotto GM (che noi abbiamo esplicitamente inserito in F_N). In realta', le orbite non sono che approssimativamente circolari. Utilizzando le orbite ellittiche, i differenti valori di r^3/T^2 nella tabella sono spiegati (leggera dipendenza dalla massa del pianeta)!. Tuttavia anche con questa modifica, il valore per Mercurio resta leggermente anomalo. Questa anomalia venne spiegata rivoluzionando la teoria della Gravitazione (**Teoria della Relatività Generale di Einstein**).

La parte matematicamente più complessa da studiare e' il fatto che le orbite dei pianeti sono ellittiche (2ª parte della I legge). Anche questo e' conseguenza del fatto che $F \sim 1/r^2$

Conclusioni

- Le leggi di Newton sono state l' esempio più importante di come osservazioni cinematiche possano produrre leggi dinamiche. La spiegazione della gravita' terrestre e di quella tra pianeti rappresenta il primo esempio di **unificazione dei fenomeni**
- Forti delle leggi della dinamica, possiamo estendere il nostro campo di indagini ad altre branchie della fisica
- Le leggi di Newton,con la Legge di Gravitazione Universale, rappresentano una delle maggiori conquiste intellettuali dell'Umanità