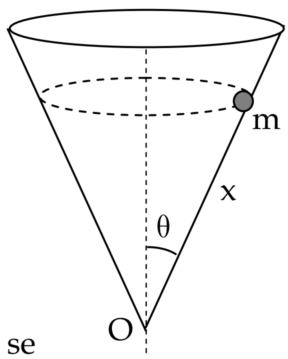
Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 9 Settembre 2010
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Al tempo $t=0$ una carrozza ferroviaria in moto con velocità V comincia a muoversi di moto rettilineo uniformemente decelerato ($-a$). Nello stesso istante, da un certo punto P un osservatore a bordo della carrozza lancia lungo la verticale verso l'alto un punto materiale di massa m con velocità $v=v_0$. Determinare a quale distanza da P il punto materiale cadrà sul pavimento della carrozza (si trascuri l'attrito dell'aria e si supponga la carrozza sufficientemente alta).

2) Si scrivano le equazioni cartesiane del moto di un punto materiale di massa $\boldsymbol{m}$ situato in un campo di forze conservativo avente energia potenziale definita in tutto lo spazio dalla funzione $\boldsymbol{V(x,y,z) = kz}$ (con $\boldsymbol{k}$ costante), sapendo che all'istante iniziale $\boldsymbol{t=0}$ il punto materiale si trova nella posizione definita dalla terna di coordinate $(\boldsymbol{0,0,z_0})$ con velocità $\bar{v}_0 = v_{0x}\,\bar{i}$.

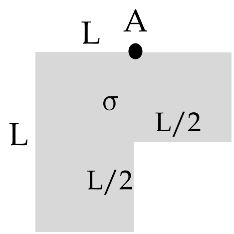


3) Una massa m viene posta in rotazione con velocità v su di una traiettoria circolare all'interno di una superficie conica priva di attrito. Determinare a quale distanza x da O si deve posizionare la massa affinché la traiettoria sia stabile.

4) Un campo di forza è definito in tutto lo spazio dall'espressione

$$\bar{F} = (3k_1\, x^2y^2z + 2\, k_2)\ \bar{i} + 2k_1x^3yz\ \bar{j} + k_1x^3\, y^2\ \bar{k},$$

con $\boldsymbol{k_1}$ e $\boldsymbol{k_2}$ costanti note aventi le opportune dimensioni. Verificare se il campo è conservativo, e in tal caso determinarne l'energia potenziale $\boldsymbol{V}$.



5) Una lastra quadrata di lato L, sagomata come mostrato in figura, è costituita da un materiale di densità superficiale σ. Determinare l'angolo all'equilibrio (rispetto alla verticale) formato dalla linea mediana della lastra qualora venga sospesa ad un asse normale al foglio e passante per il punto A.

6) Commentare e mostrare i passaggi che conducono alla formulazione della seconda equazione cardinale della meccanica.

7) Formulare e dimostrare il teorema di Konig per la quantità di moto.

Esercizio 1

posizione e velocità del punto P della carrozza rispetto a terra

$$X(t) = Vt - \frac{1}{2} a t^2$$

$$\dot{X}(t) = V - a t$$

posizione del punto materiale rispetto a terra

$$x(t) = \dot{x}_0 t \qquad \dot{x}_0 = V$$

$$y(t) = \dot{y}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \dot{y}_0 = v_0$$

durata del volo del punto materiale

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad \Delta t = \frac{2v_0}{g}$$

spazio percorso in direzione arizzontale dal punto materiale

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = V \frac{2v_0}{g}$$

spazio percorso in direzione orizzontale dal punto P della carrozza

$$\Delta X = X(t_0 + \Delta t) - X(t_0) = V\Delta t - \frac{1}{2} a \Delta t^2 - a t_0 \Delta t = V \frac{2v_0}{g} - \frac{1}{2} a (\frac{2v_0}{g})^2 - a t_0 \frac{2v_0}{g}$$

differenza dei percorsi

$$d = \Delta x - \Delta X = V \frac{2v_0}{g} - V \frac{2v_0}{g} + \frac{1}{2} a (\frac{2v_0}{g})^2 + a t_0 \frac{2v_0}{g} = \frac{1}{2} a (\frac{2v_0}{g})^2 + a t_0 \frac{2v_0}{g}$$

Esercizio 2

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = (0, 0, -k) = m\vec{a} \Rightarrow a_x = 0,\ a_y = 0,\ a_z = -\frac{k}{m}.$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{cost} = v_{0,x} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0,x} t = v_{0,x} t;$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = \text{cost} = v_{0,y} = 0 \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0,y} t = 0;$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m} \Rightarrow \dot{z} = v_{0,z} - \frac{k}{m} t = -\frac{k}{m} t \Rightarrow z(t) = z_0 + v_{0,z} t - \frac{1}{2}\frac{k}{m} t^2 = z_0 - \frac{1}{2}\frac{k}{m} t^2;$$

Esercizio 3

Assumiamo un riferimento cilindrico con l'asse z lungo l'asse di rotazione. Le forze agenti sul punto materiale valgono

$$\vec{R} = R\ \sin\vartheta\,\vec{k} - R\cos\vartheta\ \vec{i}_R$$

$$\vec{P} = -mg\,\vec{k}$$

All'equilibrio si deve avere

$$\vec{R} + \vec{P} = -m\frac{v^2}{x\sin\vartheta}\vec{i}_R$$

otteniamo allora

$$R\ \sin\vartheta\,\vec{k} - R\cos\vartheta\ \vec{i}_R - mg\,\vec{k} = -m\,\omega^2\,(x\sin\vartheta)\vec{i}_R$$

$$\begin{cases} R\ \sin\vartheta = mg \\ R\cos\vartheta = m\dfrac{v^2}{x\sin\vartheta} \end{cases} \qquad \begin{cases} R = mg/\sin\vartheta \\ (mg/\sin\vartheta)\cos\vartheta = m\dfrac{v^2}{x\sin\vartheta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ x = \dfrac{v^2}{g}\cos\vartheta \end{cases}$$

Esercizio 4

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 6k_1x^2yz = \frac{\partial F_y}{\partial x};\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = 3k_1x^2y^2 = \frac{\partial F_z}{\partial x};\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 2k_1x^3y = \frac{\partial F_z}{\partial y};$$ => campo conservativo

$$-V = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} \left(3k_1x^2y^2z + 2k_2\right)dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} 2k_1x^3yz\,dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} k_1x^3y^2\,dz = 2k_2x + k_1x^3y^2z$$

Esercizio 5

Assumiamo un riferimento xy con l'origine in A e l'asse Y lungo la linea di separazione dei due mezzi.

Il centro di massa della lastra è posizionato in

$$Y=\frac{\sigma(L\frac{L}{2})(-\frac{L}{2})+\sigma(\frac{L}{2}\frac{L}{2})(-\frac{L}{4})}{\sigma(L\frac{L}{2})+\sigma(\frac{L}{2}\frac{L}{2})}=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}(-\frac{1}{4})}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}L=-\frac{5}{12}L$$

$$X=\frac{\sigma(L\frac{L}{2})(-\frac{L}{4})+\sigma(\frac{L}{2}\frac{L}{2})(\frac{L}{4})}{\sigma(L\frac{L}{2})+\sigma(\frac{L}{2}\frac{L}{2})}=\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{4})+\frac{1}{4}(\frac{1}{4})}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}L=-\frac{1}{12}L$$

L'angolo cercato altro non è che l'angolo formato dalla congiungente il centro di massa con l'origine e la direzione verticale

$$\vartheta=arctg\,|\frac{X}{Y}|=arctg(\frac{1}{5})$$