Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 17 Luglio 2008
Prof. Nicola Semprini Cesari

Quesiti

1) Un punto materiale di massa m si muove su di un piano orizzontale liscio con le seguenti equazioni orarie: $x(t) = A\cos(\omega\, t)$ e $y(t) = Bsen^2(\omega\, t)$ dove A, B ed ω sono costanti positive. Determinare:
   a) l'equazione della traiettoria;
   b) l'espressione dei vettori velocità ed accelerazione all'istante $t=\pi/(2\omega)$;
   c) il raggio di curvatura ρ della traiettoria allo stesso istante.

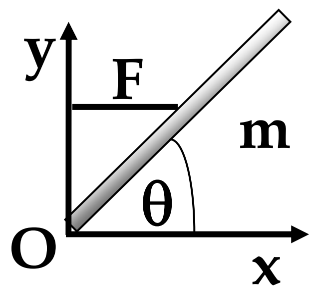
2) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = -\alpha y^3\vec{i} - 3\alpha x y^2\vec{j} - 3\beta z^2\vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Quali sono le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β?

3) Dimostrare il teorema del momento della forza $\vec{r} \wedge \vec{f} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{p}) + \vec{v}_\Omega \wedge \vec{p}$

4) Spiegare e commentare le forze inerziali.

Problema

Un'asta omogenea di massa $2m$ e lunghezza L è incernierata nel punto O su di un piano orizzontale ed è libera di ruotare nel piano verticale. L'asta è inizialmente fissata nel suo baricentro con una fune F inestensibile come mostrato in figura, e forma con il piano orizzontale un angolo $\theta=30°$. Determinare l'espressione delle seguenti quantità:



a. La tensione T della fune e le componenti orizzontale R_x e verticale R_y della reazione vincolare in O.
Supponendo che ad un certo istante la fune F venga tagliata:
b. il modulo dell'accelerazione angolare della sbarra;
c. la velocità v_0 del baricentro della sbarra quando questa tocca il pavimento.

Soluzioni

Q1

a) Mettendo a sistema le leggi orarie, quadrando e sommando membro a membro si ottiene l'equazione di una parabola con la concavità rivolta verso il basso: $y=-\frac{B}{A^2}x+B$

b) derivando una volta o due volte le leggi orarie, e sostituendo al tempo generico quello richiesto: $\vec{v}(\frac{\pi}{2\omega})=-\omega A\cdot\vec{i}$ $\quad\quad$ $\vec{a}(\frac{\pi}{2\omega})=-2B\omega^2\cdot\vec{j}$

c) poiché l'accelerazione è perpendicolare alla velocità, ha solo componente normale alla traiettoria e si ha $\frac{\omega^2 A^2}{\rho}=2B\omega^2$ da cui $\rho=\frac{A^2}{2B}$

Q2

Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine e il punto generico C(x,y,z) si ottiene l'energia potenziale $V=\alpha xy^3+\beta z^3$. La costante α ha dimensioni [M $L^{-2}T^{-2}$]e unità di misura N/m^3 oppure Kg/m^2s^2, mentre β ha dimensioni [$ML^{-1}T^{-2}$] e si misura in N/m^2.

Problema

a) Le forze presenti sono: la forza peso $\vec{P}$ dell'asta, la Tensione $\vec{T}$ della fune e la reazione $\vec{R}$ del vincolo in O. Il sistema è inizialmente in equilibrio statico, quindi devono essere soddisfatte le equazioni cardinali della statica: $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0$ e $\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0$. Rispetto al sistema di riferimento della figura ricaviamo l'espressione della tensione T dalla seconda equazione (si è scelto il polo per il calcolo dei momenti nell'origine), e l'espressione delle componenti della reazione vincolare dalla prima:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i=0\ \rightarrow\ \frac{L}{2}T\sin\theta-\frac{L}{2}P\cos\theta=0 \quad \text{da cui} \quad \vec{T}=-2\sqrt{3}mg\cdot\vec{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0\ \rightarrow \begin{cases}T+R_x=0\\ P+R_y=0\end{cases} \text{da cui} \begin{cases}R_x=-T=2\sqrt{3}mg\\ R_y=2mg\end{cases}$$

b) $\vec{M}\cdot\hat{\omega}=I_\omega\ddot{\phi}$ dove $I=2m\frac{L^2}{3}$ e $\vec{M}\cdot\hat{\omega}=-2mg\frac{L}{2}\cos\theta$ per cui $\ddot{\phi}=\frac{\sqrt{27}g}{4L}$

c) cons. dell'energia $\frac{1}{2}I\omega^2=2mg\frac{L}{2}\sin\theta\ \rightarrow\omega=\sqrt{\frac{3g}{2L}}\ \rightarrow\ v_o=\frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{2L}}=\sqrt{\frac{3gL}{8}}$