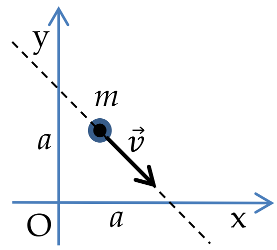
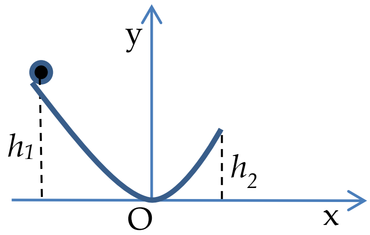
Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 9 Settembre 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti



1) Esprimere il momento della quantità di moto del punto materiale nel riferimento indicato in figura e assumendo l'origine come polo di riduzione.



2) Un corpo di massa m scivola, senza attrito, lungo un profilo parabolico di equazione $y = a\,x^2$ partendo da una quota h_1. Determinare il vettore velocità nell'istante in cui il corpo si stacca dal profilo.

3) Verificare se il campo di forza $\vec{F} = \alpha\left[\,yz\,(3x^2y+2xz^2+y^2z)\vec{i}+xz\,(2x^2\,y+xz^2+3y^2z)\,\vec{j}+ xy\,(x^2y+3xz^2+2y^2z)\vec{k}\;\right]$, dove α è una costante, è conservativo, e in tal caso calcolarne l'espressione dell' energia potenziale.

4) Commentare il concetto di momento d'inerzia. Mostrare i passaggi che conducono alla sua introduzione.

5) Commentare il concetto di massa inerziale, illustrare le sue proprietà, indicarne l'unità di misura.

Meccanica: problema

Un satellite artificiale di massa m ruota attorno alla Terra, di massa M_T, su di un'orbita circolare di raggio R_s (rispetto al centro della Terra). Trascurando il moto della Terra stessa, determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) l'energia cinetica T_s e l'energia meccanica totale E_s del satellite in funzione della costante gravitazionale γ, di m, M_T e di R_s.
b) supponendo che il satellite perda una quantità di energia meccanica totale pari a 1/8 della sua energia cinetica iniziale T_s, il valore del rapporto (R_s'/R_s) tra il raggio R_s' della nuova orbita circolare e quello originario R_s.

MECCANICA

1)
Il momento può essere calcolato in un qualunque istante, scegliamo allora quello in cui la traiettoria interseca l'asse y ad esempio. Si ha

$$\vec{r} = a\,\vec{j} \qquad \vec{v} = v\cos\alpha\,\vec{i} - v\sin\alpha\,\vec{j} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \vec{m} = \vec{r}\wedge m\vec{v} = a\,\vec{j}\wedge m(v\cos\alpha\,\vec{i} - v\sin\alpha\,\vec{j}) =$$

$$-m\,v\,a\cos\alpha\,\vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}m\,v\,a\,\vec{k}$$

2)
Nell'istante in cui il corpo si stacca dal profilo possiede una velocità di modulo

$$v = \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}$$

ed un direzione data dalla tangente alla curva del profilo nel punto di stacco:

$$y = a\,x^2 \quad \frac{dy}{dx} = 2\,a\,x \quad ma \quad h_2 = a\,x_2^2 \quad da\ cui \quad x_2 = \sqrt{h_2/a} \quad e\,quindi \quad \frac{dy}{dx} = tg\alpha = 2\,a\sqrt{h_2/a} = 2\sqrt{a\,h_2}$$

da cui

$$\sin\alpha = tg\alpha/\sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{2\sqrt{a\,h_2}}{\sqrt{1+4\,a^2\,h_2^2}} \qquad e \qquad \cos\alpha = 1/\sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+4\,a^2\,h_2^2}}$$

La velocità vale allora

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2\,g\,(h_1-h_2)}{1+4\,a^2\,h_2^2}}\,\vec{i} + 2\sqrt{\frac{2\,g\,a\,h_2\,(h_1-h_2)}{1+4\,a^2\,h_2^2}}\,\vec{j}$$

3)
Il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Se si integra sul percorso a zig-zag che porta prima dall'origine a (*x,0,0*) poi a(*x,y,0*) tutti e tre gli addendi del prodotto $\vec{F}\cdot dx\,\vec{i} + \vec{F}\cdot dy\,\vec{j} + \vec{F}\cdot dz\,\vec{k}$ si annullano o perché hanno a fattor comune una coordinata z=0 o per annullamento del prodotto scalare tra versori ortogonali. Resta solamente l' integrale della componente z della forza da (*x,y,0*) a (*x,y,z*), cioè

$$\int_0^z \alpha xy(x^2y + 3xz^2 + 2y^2z)dz = \alpha\left(x^3y^2z + x^2yz^3 + xy^3z^2\right) = \alpha xyz(x^2y + xz^2 + y^2z) = -V$$

Problema

a) Applicando la seconda legge della dinamica si ha che la forza centripeta, rappresentata dall'attrazione gravitazionale, uguaglia in modulo il prodotto della massa del satellite per la sua accelerazione centripeta, cioè $\gamma\frac{m_sM_T}{R_s^2} = m_s\frac{v_s^2}{R_s}$, da cui

$$T_s = \frac{1}{2}\gamma\frac{m_sM_T}{R_s}.$$

Inoltre: $E_s = T_s + V_s = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} - \frac{1}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{9}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s'}$

b) La perdita di energia cinetica è $\Delta T = \frac{1}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s}$, ma la conservazione dell'energia meccanica totale rimane valida, cioè $T_s + V_s - \Delta T = T_s' + V_s'$, il che vuol dire che $-\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} - \frac{1}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{9}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s'}$, da cui $R_s' = \frac{8}{9}R_s$.