Fisica Generale T-A N.2

Prova scritta del 4 Luglio 2011

Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica

Q1) Un corpo materiale di massa $m=2\ Kg$ scivola lungo una discesa partendo da fermo da una quota $h=20\ m$. Sapendo che giunge alla fine della discesa con una velocità di modulo $v=13\ m/s$, calcolare il lavoro fatto dalle forze di attrito.

Q2) Verificare se il campo di forza definito dall'espressione $\vec{f}=\frac{kx}{(x^2+y^2)}\vec{i}+\frac{ky}{(x^2+y^2)}\vec{j}$ (dove $k = 1\ J\ m$) è conservativo, e in caso affermativo calcolare il lavoro che esso compie per uno spostamento dal punto A di coordinate (3,0,0) m al punto B di coordinate (0,-4.5) m.

Q3) Calcolare la posizione del centro di massa di un corpo piano di spessore trascurabile, avente forma di triangolo isoscele con altezza h, base b e massa M uniformemente distribuita sulla sua superficie S rispetto all' asse coincidente con la base.

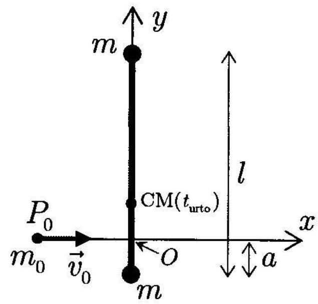
Q4) Dimostrare la formula della accelerazione nel sistema intrinseco di coordinate.

Q5) Discutere i moti relativi dei sistemi di coordinate.

Problema

Due punti materiali di ugual massa $m=0.5\ Kg$, collegati tra loro da un'asta di massa trascurabile e lunghezza $l=60\ cm$, sono inizialmente in quiete su di un piano orizzontale liscio. Un terzo punto materiale, di massa $m_0=2m$ in moto su tale piano con velocità $v_0\vec{i}$ di modulo $3ms^{-1}$, urta l'asta, nel punto 0 distante $a=\frac{1}{6}l$ da un suo estremo, rimanendovi conficcato. Assumendo in tale punto l'origine di un sistema cartesiano Oxy nel quale l'asta giace inizialmente lungo l' asse y (vedi figura), determinare le seguenti grandezze fisiche:

a) modulo direzione e verso della la velocità del centro di massa del sistema prima e dopo l' urto;
b) la traiettoria del centro di massa dopo l' urto;
c) il momento d' inerzia del sistema dopo l'urto, calcolato rispetto all'asse che passa per il centro di massa ed è ortogonale al piano del moto.



Soluzioni

Q1

$$\int_A^B \vec{F}_{Tot} \cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A \qquad \vec{F}_{Tot} = \vec{F}_{peso} + \vec{F}_{attr} \qquad \int_A^B \vec{F}_{peso} \cdot d\,\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A$$

$$\int_A^B -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\,\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A \qquad \Phi(\vec{r}_A) - \Phi(\vec{r}_B) + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A$$

$$mgz_A - mgz_B + \int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A$$

$$\int_A^B \vec{F}_{attr} \cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A + mgz_B - mgz_A = \frac{1}{2} 2 \times 13^2 - 0 + 0 - 2 \times 9.81 \times 20 = -223\,J$$

Q2

$\nabla \wedge \vec{f} = \vec{0}$, quindi il campo è conservativo. Conviene integrare prima su un arco di circonferenza con centro nell'origine del sistema di riferimento che in un piano di ascissa *z=0* (cioè nel piano *x,y*) sposta in primo luogo il punto di applicazione della forza da A= (3,0,0) a C = (0,-3,0). Lungo quest'arco di traiettoria, la forza, che è esprimibile come $\vec{f} = k\frac{\vec{r}}{r^2} = k\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\left(x^2 + y^2\right)}$ è in ogni punto perpendicolare alla traiettoria, e quindi non compie lavoro. Resta pertanto da integrare la forza solamente sul tratto rettilineo dell' asse y, per x che va da -3 a -4, fino a raggiungere il punto B= (0,-4,5) . Si ha così che il lavoro si riduce a $L = \int_{-3}^{-4} \frac{ky}{y^2} dy = k \int_{-3}^{-4} \frac{k}{y} dy = k[\ln y]_{-3}^{-4} = k \ln\frac{4}{3} J = 0.29 J$

Q3

Assumiamo un riferimento con asse y lungo l'altezza ed asse x lungo la base con l'origine nel suo punto di mezzo. Avremo allora $X_{CM}=0$ mentre per la coordinata Y_{CM} possiamo riferirci anche alla metà del triangolo. Si ha allora

$$Y_{CM} = \int_0^h \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} y\,\sigma\,dy\,dx = \int_0^h y\,\sigma\,dy \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} dx = \int_0^h y\,\sigma\,dy\ (x)\Big|_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} = \int_0^h b(1-\frac{y}{h}) y\,\sigma\,dy =$$

$$= b\sigma \int_0^h (y - \frac{y^2}{h})\,dy = b\sigma(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3h}y^3)_0^h = \frac{b\sigma h^2}{6} \qquad ma \;\; M = \frac{b h \sigma}{2}$$

$$I = \frac{1}{3} M\,h$$

Problema

a) nell'urto entrano in gioco solo forze interne per cui modulo direzione e verso della velocità del centro di massa prima e dopo l'urto sono identiche. D'altra parte si ha

$$\vec{P} = M\,\vec{v}_{CM} \qquad 2m\,\vec{v}_0 = 4m\,\vec{v}_{CM} \qquad \vec{v}_{CM} = \frac{1}{2}\vec{v}_0 = \frac{1}{2}\times 3\vec{i} = 1.5\,\frac{m}{s}\,\vec{i}$$

b) dato che il moto del centro di massa si sviluppa lungo la direzione delle x la quota y rimarrà costante. D'altra parte la quota Y del centro di massa si trova in posizione

$$Y_{CM} = \frac{m\frac{1}{6}l - m\frac{5}{6}l}{4m} = -\frac{1}{6}l$$

per cui la equazione della traiettoria sarà

$$y = -\frac{1}{6}l$$

c) $$I = (\frac{2}{6}l)^2 m + (\frac{1}{6}l)^2 2m + (\frac{4}{6}l)^2 m = \frac{11}{18}ml^2 = \frac{11}{18}\times 0.5\times(0.6)^2 = 0.11\,Kg\,m^2$$