# Fisica Generale LA

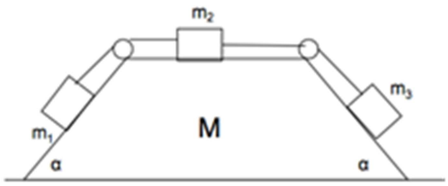
**Prof. Nicola Semprini Cesari**

**Prova Scritta del 14 Gennaio 2014**

## Meccanica

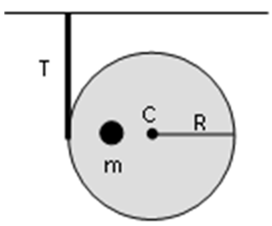
**(1)** Dato il campo di forze $\vec{F}(x,y,z)=\alpha[\left(y^2-x^2\right)\hat{\imath}+3xy\hat{\jmath}]$ determinare nel caso $\alpha=1$, il lavoro fatto per spostare un punto materiale dall'origine O(0,0) del sistema di riferimento XY, al punto A(2,2) lungo un percorso che parte dall'origine, si sposta: a) lungo l'asse X fino al punto B(2,0) e poi parallelo all'asse Y fino al punto A(2,2); b) lungo l'asse Y fino al punto B(0,2) e poi parallelo all'asse X fino al punto A(2,2); c) giustificare il risultato ottenuto.

**(2)** Un blocco di massa M =50 kg con sezione a forma di trapezio isoscele è appoggiato su una superficie orizzontale liscia. L'inclinazione rispetto all'orizzontale dei lati obliqui è 45°. A contatto del blocco si trovano posizionati come in figura tre corpi di masse $m_1$=1 kg, $m_2$=2 kg e $m_3$ collegati tra loro da due fili inestensibili di massa trascurabile e da due carrucole ideali.




Supponendo che non vi sia attrito tra i tre corpi ed il blocco, si calcoli il valore di $m_3$ affinché i tre corpi siano in equilibrio: a) nel caso il blocco M sia saldato alla superficie orizzontale di appoggio; b) nel caso in cui il blocco M si muova verso destra a velocità costante v sulla superficie di appoggio. Se il blocco M inizia a muoversi verso destra con accelerazione A=g/2, si determini c) l'accelerazione delle tre masse, supponendo $m_3$= 1kg.

**(3)** Un disco omogeneo di massa M=2kg e raggio R=0.2m é inchiodato nel suo centro C ad una parete verticale; ad una sua estremità é fissato al soffitto con una corda T (inestensibile e di massa trascurabile) e ad una distanza di $R_D/2$ dal centro é incollata una massa puntiforme m=M/2 (vedi figura). Nell'ipotesi che il sistema sia in equilibrio, determinare: a) il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse perpendicolare al disco e passante per C; b) la reazione vincolare V esercitata dal chiodo; c) la tensione della corda T. Ad un certo istante la corda si rompe, determinare d) l'accelerazione angolare del sistema.




**(4)** Un disco inizialmente fermo viene fatto ruotare con accelerazione angolare costante $\alpha_1$=1 rad/s$^2$. Dopo 10 s l'accelerazione angolare cessa e il disco ruota con velocità angolare costante per altri 10 s. Infine il disco decelera costantemente per altri 10 s fino a fermarsi. Si determini: a) la decelerazione angolare durante la fase di frenata; b) quanti giri completi compie il disco complessivamente; c) la velocità angolare media.

**(5)** Formulare e dimostrare il teorema delle forze vive nel caso dei sistemi rigidi di punti materiali.

**(6)** Commentare le proprietà dei sistemi isolati di punti materiali.

## Termodinamica

**(1)** Fornire la definizione di pressione e dimostrare che la pressione esercitata da un fluido è indipendente dalla orientazione della superficie.

**(2)** Dedurre i passaggi che conducono alla formulazione della equazione di stato dei gas perfetti.

**(3)** Enunciare il teorema di Carnot.

# Soluzioni Meccanica:

## Esercizio 1:

Innanzitutto vediamo se il campo è conservativo e per verificarlo quando calcolo il rotore della forza. Imponendo che il rotore sia nullo ottengo la condizione sulle costanti che rendono il campo di forze conservativo.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \delta/\delta x & \delta/\delta y & \delta/\delta z \\ \alpha\left(y^2 - x^2\right) & 3\alpha xy & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(3\alpha xy)}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha(y^2 - x^2))}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial(3\alpha xy)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha(y^2 - x^2))}{\partial y}\right) =$$

$$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(3\alpha y - 2\alpha y) = \hat{k}(\alpha y) \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \Longleftrightarrow \alpha = 0$$

Dunque il campo di forze non è conservativo e mi aspetto che il lavoro lungo due percorsi diversi dia un differente risultato.

a)

$$L_{AB} = \int_{0,0}^{x,y} \vec{F} d\vec{s} = \int_{0,0}^{2,0} F_x dx + \int_{2,0}^{2,2} F_y dy = \int_{0,0}^{2,0} \alpha\left(y^2 - x^2\right) dx + \int_{2,0}^{2,2} 3\alpha xy \, dy =$$

$$= \left[\alpha\left(y^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{0,0}^{2,0} + \left[3\alpha x \frac{y^2}{2}\right]_{2,0}^{2,2} = \left[-\alpha \frac{x^3}{3}\right]_{0,0}^{2,0} + \left[3\alpha x \frac{y^2}{2}\right]_{2,0}^{2,2} = -\alpha\frac{8}{3} + 12\alpha = \frac{28}{3}\alpha$$

b)

$$L_{AB} = \int_{0,0}^{x,y} \vec{F} d\vec{s} = \int_{0,0}^{0,2} F_y dy + \int_{0,2}^{2,2} F_x dx = \int_{0,0}^{0,2} 3\alpha xy \, dy + \int_{0,2}^{2,2} \alpha\left(y^2 - x^2\right) dx =$$

$$= \left[3\alpha x \frac{y^2}{2}\right]_{0,0}^{0,2} + \left[\alpha\left(y^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{0,2}^{2,2} = \left[\alpha\left(y^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{0,2}^{2,2} = \alpha\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}\alpha$$

c) il lavoro lungo i due percorsi è diverso, nonostante gli estremi siano gli stessi, poiché il campo non é conservativo.

## Esercizio 2:

**a)** Il sistema é fermo dunque si tratta di scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$ per i tre corpi e imporre che l'accelerazione sia nulla. Prendiamo l'asse x lungo la direzione dei lati del trapezio con verso come in figura e scriviamo le forze che agiscono su ogni corpo. Per rispondere alle domande é sufficiente scrivere la $\vec{F} = m\vec{a}$

lungo la direzione x

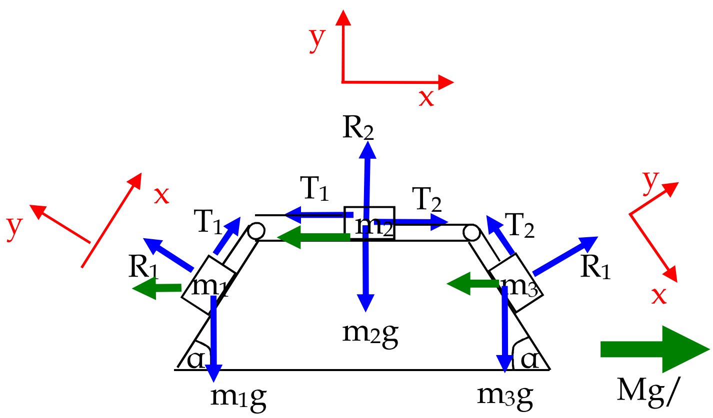
$$m_1 \to -m_1 g \sin\alpha + T_1 = 0$$
$$m_2 \to -T_1 + T_2 = 0$$
$$m_3 \to m_3 g \sin\alpha - T_2 = 0$$

Questo é un sistema in tre equazioni e tre incognite ($T_1$, $T_2$ e $m_3$) e risolvendo si trova

$$m_3 = m_1 = 1\,kg$$

**b)** La soluzione é esattamente come nel caso a) poiché in un moto rettilineo uniforme non si genera alcuna forza apparente (o fittizia che dir si voglia).

**c)** Il blocco viaggia verso destra con un'accelerazione pari a g/2 dunque il sistema non é più inerziale e su ogni corpo si esercita una forza $F_i$ (con i = 1,2,3 relativo alle masse $m_1$,$m_2$,$m_3$) pari alla massa del corpo per l'accelerazione del blocco (con segno opposto) verso sinistra (vedi figura).




Il sistema non é più in equilibrio dunque scriveremo la seconda legge della dinamica per tutti i corpi (anche in questo caso é sufficiente lungo la direzione x).

$$m_1 \to -m_1 g \sin\alpha + T_1 - F_1 \cos\alpha = -m_1 a$$
$$m_2 \to -T_1 + T_2 - F_2 = -m_2 a$$
$$m_3 \to m_3 g \sin\alpha - T_2 - F_3 \cos\alpha = -m_3 a$$

dove

$$F_1 = m_1 \frac{g}{2}\ , \quad F_2 = m_2 \frac{g}{2} \quad \text{e} \quad F_3 = m_3 \frac{g}{2}$$

Dunque sostituendo

$$-m_1 g \sin\alpha + T_1 - m_1 \frac{g}{2}\cos\alpha = -m_1 a$$

$$-T_1 + T_2 - m_2 \frac{g}{2} = -m_2 a$$

$$m_3 g \sin\alpha - T_2 - m_3 \frac{g}{2}\cos\alpha = -m_3 a$$

Anche questo é un sistema in tre equazioni in tre incognite ($T_1$, $T_2$ e a), che risolto rispetto all'accelerazione del sistema dà:

$$|\vec{a}| = \frac{g\left(\frac{m_1 \cos\alpha}{2} + m_1 \sin\alpha + \frac{m_2}{2} - m_3 \sin\alpha + \frac{m_3 \cos\alpha}{2}\right)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

(la direzione ed il verso dell'accelerazione é ovviamente quella del moto).

Sostituendo si ottiene:

$$|\vec{a}| = \frac{\frac{g\sqrt{2}}{4}\left(3m_1 + \sqrt{2}m_2 + \frac{m_2}{2} - m_3\right)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{g\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{4} = 0.43\ g$$

**Osservazione 1 :** nel caso l'accelerazione $a'$ del blocco fosse stata maggiore, il corpo $m_1$ si sarebbe potuto staccare dalla superficie del trapezio e la soluzione proposta non sarebbe più corretta. L'accelerazione massima possibile del blocco affinché $m_1$ non si stacchi si può ricavare dalla $F_y = m_1 a_y$ lungo la direzione y

$$m_1\ (y) \rightarrow -m_1 g \cos\alpha + m_1 a' \sin\alpha + R_1 = m_1 a_y$$

Imponendo sia $a_y$=0 che $R_1$=0 (al limite il corpo non tocca il trapezio) si ottiene

$$a' \leq g \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \leq g$$

come era nel testo.

**Osservazione 2 :** si poteva pensare (erroneamente) che per il terzo principio della dinamica, su ogni massa $m_1$,$m_2$ e $m_3$ agisse una forza uguale per tutti e tre i corpi data da

$$F = -\frac{Mg}{2}$$

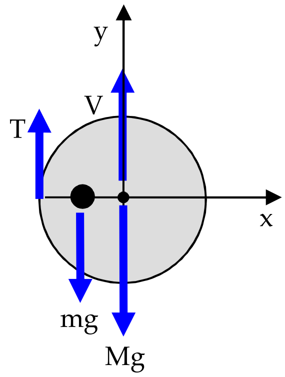
Questo non é vero poiché il terzo principio si riferisce a forze reali tra corpi, mentre qui siamo in presenza di forze apparenti.

## Esercizio 3:

**a)** Il sistema é composto dal disco e dalla massa puntiforme, dunque il momento d'inerzia del sistema é dato da:

$$I_S = I_D + I_m = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + m\frac{R^2}{4} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{2}\frac{R^2}{4} = \frac{5}{8}MR^2 = 0.05\ kg\ m^2$$

**b,c)** Imponiamo le condizioni di equilibrio sul sistema cioé la sommatoria delle forze e dei momenti delle forze deve essere nulla. Prendiamo un sistema di riferimento come in figura con l'asse z uscente dal foglio: tutte le forze hanno direzione verticale, mentre i momenti delle forze (contribuiscono solo T e mg) sono lungo z.




$$\begin{cases} T - Mg - mg + V = 0 \\ -RT + mg\dfrac{R}{2} = 0 \end{cases}$$

Questo é un sistema in due incognite (T,V) e due equazioni che risolto dà:

$$\begin{cases} V = g\left(M + \dfrac{m}{2}\right) = \dfrac{5gM}{4} = 24.5\ N \\ T = \dfrac{mg}{2} = \dfrac{g}{2} = 4.9\ N \end{cases}$$

**d)** Utilizziamo la seconda equazione cardinale della meccanica

$\vec{M} = I\vec{\alpha}$

nel momento in cui la corda si spezza il momento della forza $\vec{M}$ é dato dall'unica forza dovuta al peso della massa m.

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} = \vec{r} \times \frac{M}{2}\vec{g} = \frac{RMg}{2}\hat{k}$$

mentre il momento di inerzia é già stato calcolato nel punto a)

$$I_S = I_D + I_m = \frac{1}{2}MR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}MR^2$$

dunque sostituendo in $\vec{M} = I\vec{\alpha}$

$$\frac{RMg}{2}\hat{k} = \left(\frac{5}{8}MR^2\right)\vec{\alpha}$$

da cui si ottiene

$$\vec{\alpha} = \frac{4g}{5R}\hat{k}$$

## Esercizio 4:

**a,b)**
Siamo in presenza di un moto circolare, in particolare:

- prima fase → moto circolare uniformemente accelerato con accelerazione costante $\alpha_1$=1 rad/s$^2$ della durata di 10 s;
- seconda fase → moto circolare uniforme della durata di 10 s;
- terza fase → moto circolare uniformemente decelerato della durata di 10 s.

Scriviamo le equazioni che legano l'angolo percorso, la velocità angolare e l'accelerazione angolare per le varie fasi:

Prima fase → $\vartheta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 t_1^2 = 50\ rad$
dove $\theta_1$ é l'angolo coperto in questa prima fase.
La velocità angolare alla fine della durata di questa fase é
$\omega_1 = \alpha_1 t_1 = 10\ rad/s$

Seconda fase →
$\vartheta_2 = \omega_1 t_1 = 100\ rad \qquad \omega_2 = \omega_1 = 10\ rad/s$

Terza fase →
$\vartheta_3 = \omega_2 t_3 - \frac{1}{2}\alpha_3 t_3^2$
Per calcolare $\theta_3$ bisogna prima determinare $\alpha_3$ e per questo scriviamo la relazione tra la velocità angolare e l'accelerazione angolare
$\omega_{fin} = \omega_{in} - \alpha_3 t_3 = \omega_2 - \alpha_3 t_3$
imponendo che la $\omega_{fin}$ sia nulla , si ricava:
$\omega_2 - \alpha_3 t_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{\omega_2}{t_3} = 1\ rad/s^2$
A questo punto
$\vartheta_3 = \omega_2 t_3 - \frac{1}{2}\alpha_3 t_3^2 = 50\ rad$
Pertanto il numero di giri percorso é dato da:
$n = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{2\pi} = 31.8$

**c)** La velocità angolare media é data da:
$<\omega> = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3}{t_1 + t_2 + t_3} = 6.67\ rad/s$