Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 7 Luglio 2017

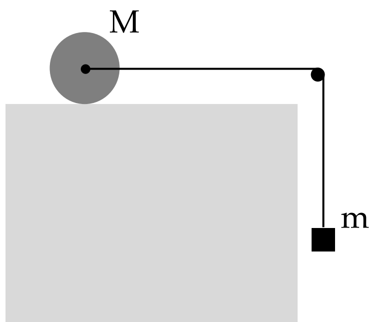
Meccanica

Q1) Dato un punto materiale di massa *m*, richiamare l'espressione del vettore posizione in coordinate polari cilindriche, calcolare poi i vettori velocità e momento della quantità di moto.

Q2) Una massa *m* inizialmente ferma cade in prossimità della superficie terrestre lungo la verticale, soggetta alla forza peso $-mg\vec{k}$ ed alla forza resistente dell'aria $-\lambda\dot{z}\vec{k}$. Determinare la velocità della massa *m* in funzione del tempo assumendo l'istante iniziale come origine dei tempi.

Q3) Una massa *m*, ferma rispetto alla terra di massa M_T, viene lasciata libera di cadere. Calcolare la velocità con cui incontra il suolo nella ipotesi che la distanza iniziale valga NR_T dove N è un certo numero naturale ed R_T è il raggio terrestre.

Q4) Un disco omogeno di raggio *R* e massa *M* rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale a seguito della tensione applicata da una funicella inestensibile e non massiva al centro del disco stesso a sua volta dovuta alla forza peso applicata alla massa *m* fissata all'altro estremo della funicella stessa. Determinare l'accelerazione impressa al centro di massa del disco.



Q5) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.

Q6) Illustrare i passaggi che conducono alla introduzione del concetto di momento d'inerzia.

Termodinamica

1) N moli di gas perfetto compiono un ciclo termodinamico reversibile costituito da i) una espansione isobara AB; ii) una isocora con diminuzione della pressione BC; iii) una compressione isobara CD; iv) una isocora con aumento della pressione DA. Esprimere in funzione dei volumi V_A e V_B e delle pressioni P_A e P_D i) il calore assorbito nel ciclo; ii) il rendimento del ciclo.

2) Illustrare il concetto di entropia.

SOLUZIONI

MECCANICA

Q1)

Assumendo il polo di riduzione nell'origine si ha:

$$\vec{r} = R\,\vec{i}_R + z\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{i}_R + R\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (R\,\vec{i}_R + z\,\vec{k})_R \wedge m(\dot{R}\vec{i}_R + R\dot{\varphi}\vec{i}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}) = -zR\dot{\varphi}\vec{i}_R + (\dot{z}R - R\dot{z})\vec{i}_\varphi + R^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

Q2)

$$-mg - \lambda\dot{z} = m\ddot{z} \qquad -mg - \lambda\dot{z} = m\frac{d\dot{z}}{dt} \qquad -dt = \frac{d\dot{z}}{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}}$$

$$\frac{d(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})}{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}} = -\frac{\lambda}{m}dt \qquad \int_0^t \frac{d(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})}{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}} = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t dt \qquad \ln\frac{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}(t)}{g} = -\frac{\lambda}{m}t$$

$$\frac{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}(t)}{g} = e^{-\frac{\lambda}{m}t} \qquad \dot{z}(t) = \frac{mg}{\lambda}(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1)$$

Q3)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - G\frac{mM_T}{R} \qquad E_{in} = -G\frac{mM_T}{R_{in}} \qquad E_{fin} = \frac{1}{2}m\dot{R}_{fin}^2 - G\frac{mM_T}{R_{fin}}$$

$$E_{in} = E_{fin} \qquad -G\frac{mM_T}{R_{in}} = \frac{1}{2}m\dot{R}_{fin}^2 - G\frac{mM_T}{R_{fin}} \qquad \frac{1}{2}m\dot{R}_{fin}^2 = G\frac{mM_T}{R_{fin}} - G\frac{mM_T}{R_{in}}$$

$$\dot{R}_{fin} = \sqrt{2GM_T(\frac{1}{R_{fin}} - \frac{1}{R_{in}})} = \sqrt{2GM_T(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{NR_T})}$$

$$\dot{R}_{fin} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}(\frac{N-1}{N})}$$

Q4)

Con le equazioni cardinali

$$\begin{aligned}
&\text{equazioni del moto del disco}\\
&T\vec{j}-F_a\vec{j}=M\ddot{Y}\vec{j}\\
&(R\vec{k}\wedge T\vec{j})\cdot\vec{i}=I_\Omega\ddot{\varphi}\qquad \Omega=\text{punto di contatto del disco al suolo}\\
&\text{equazione del moto della massa}\\
&T\vec{k}-mg\vec{k}=m\ddot{Z}\vec{k}\\
&\text{relazioni vincolari}\\
&Rd\varphi=-dY\\
&dY=-dZ
\end{aligned}$$

—

$T-F_a=M\ddot{Y}$	$T-F_a=M\ddot{Y}$	$T-F_a=M\ddot{Y}$	$\ddot{Y}=g\dfrac{1}{(1+\dfrac{I_\Omega}{mR^2})}$
$-RT=I_\Omega\ddot{\varphi}$	$R^2T=I_\Omega\ddot{Y}$	$R^2(mg-m\ddot{Y})=I_\Omega\ddot{Y}$	
$T-mg=m\ddot{Z}$	$T-mg=-m\ddot{Y}$	—	—
$R\ddot{\varphi}=-\ddot{Y}$	—	—	—
$\ddot{Y}=-\ddot{Z}$	—	—	—

$$I_\Omega=I_{CM}+MR^2=\frac{1}{2}MR^2+MR^2=\frac{3}{2}MR^2$$

$$\ddot{Y}=g\frac{1}{(1+\frac{3}{2}\frac{M}{m})}$$

Con la conservazione della energia

$$\begin{aligned}
&E=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\frac{1}{2}I\omega^2+mgh+\frac{1}{2}mv^2\\
&v_{CM}=-\omega R=-v\\
&dh=-v_{CM}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v_{CM}^2}{R^2}+mgh+\frac{1}{2}mv_{CM}^2\\
&dh=-v_{CM}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}M+m)v_{CM}^2+mgh\\
&dh=-v_{CM}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}M+m)2v_{CM}a_{CM}+mg\dot{h}=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}M+m)2v_{CM}a_{CM}-mgv_{CM}=0\\
&dh=-v_{CM}dt
\end{aligned}$$

$$a_{CM}=g\frac{m}{m+\frac{3}{2}M}$$

TERMODINAMICA

$$\require{cancel}\cancel{d}Q=\frac{C_P}{R}PdV+\frac{C_V}{R}VdP$$

Calore scambiato nelle isobare

$$\cancel{d}Q=\frac{C_P}{R}PdV \quad \int_A^B \cancel{d}Q=\frac{C_P}{R}P_A\int_A^B dV=\frac{C_P}{R}P_A(V_B-V_A) \quad \text{calore positivo entrante}$$

$$\cancel{d}Q=\frac{C_P}{R}PdV \quad \int_C^D \cancel{d}Q=\frac{C_P}{R}P_D\int_C^D dV=\frac{C_P}{R}P_D(V_D-V_C)=-\frac{C_P}{R}P_D(V_B-V_A) \quad \text{calore negativo uscente}$$

Calore scambiato nelle isocore

$$\cancel{d}Q=\frac{C_V}{R}VdP \quad \int_B^C \cancel{d}Q=\frac{C_V}{R}V_B\int_B^C dP=\frac{C_V}{R}V_B(P_C-P_B)=-\frac{C_V}{R}V_B(P_A-P_D) \quad \text{calore negativo uscente}$$

$$\cancel{d}Q=\frac{C_V}{R}VdP \quad \int_D^A \cancel{d}Q=\frac{C_V}{R}V_A\int_D^A dP=\frac{C_V}{R}V_A(P_A-P_D)=\frac{C_V}{R}V_A(P_A-P_D) \quad \text{calore positivo entrante}$$

1) *Calore acquisto dal gas perfetto nel ciclo*

$$Q_{in}=\frac{C_P}{R}P_A(V_B-V_A)+\frac{C_V}{R}V_A(P_A-P_D)$$

Calore ceduto dal gas perfetto nel ciclo

$$Q_{out}=\frac{C_P}{R}P_D(V_B-V_A)+\frac{C_V}{R}V_B(P_A-P_D)$$

$$\eta=1-\frac{Q_{out}}{Q_{in}}=1-\frac{\frac{C_P}{R}P_D(V_B-V_A)+\frac{C_V}{R}V_B(P_A-P_D)}{\frac{C_P}{R}P_A(V_B-V_A)+\frac{C_V}{R}V_A(P_A-P_D)}=$$

$$=\frac{\frac{C_P}{R}P_A(V_B-V_A)+\frac{C_V}{R}V_A(P_A-P_D)-\frac{C_P}{R}P_D(V_B-V_A)-\frac{C_V}{R}V_B(P_A-P_D)}{\frac{C_P}{R}P_A(V_B-V_A)+\frac{C_V}{R}V_A(P_A-P_D)}$$

$$=\frac{C_P(P_A-P_D)(V_B-V_A)-C_V(V_B-V_A)(P_A-P_D)}{C_PP_A(V_B-V_A)+C_VV_A(P_A-P_D)}$$

$$=\frac{(C_P-C_V)(P_A-P_D)(V_B-V_A)}{C_PP_A(V_B-V_A)+C_VV_A(P_A-P_D)}$$

$$=\frac{R(P_A-P_D)(V_B-V_A)}{C_PP_A(V_B-V_A)+C_VV_A(P_A-P_D)}$$

2) *Rendimento del gas perfetto*

$$\eta=\frac{R}{C_P\frac{P_A}{(P_A-P_D)}+C_V\frac{V_A}{(V_B-V_A)}}$$