Fisica Generale LA

Prova Scritta del 10 Settembre 2012
Prof. Nicola Semprini Cesari

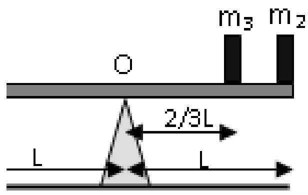
Meccanica

1) Un aereo, in volo con velocità costante di modulo $v_0 = 900\,km/h$ ad una quota $h_0 = 2000\,m$, lascia cadere una massa *m* che deve colpire un punto al suolo che giace sulla parallela alla propria traiettoria. Determinare la distanza tra la verticale dell'aereo al momento del lancio e quella del bersaglio.

2) Dato un punto materiale di massa m posto in un campo di forze la cui energia potenziale ha l'espressione $V(x,y,z) = \alpha y^2$ (con α costante positiva) e sapendo che al tempo $t_o = 0$ il punto si trova nel punto $P = (x_o, y_o, z_o)$ con velocità $\vec{v}_o = v_o\,\hat{i}$, determinare: a) la forza a cui è soggetto il punto all'istante t_o; b) le equazioni cartesiane del moto; c) il lavoro fatto dalla forza dall'istante iniziale al tempo $t_1 = \pi / 2\sqrt{m/2\alpha}$.

3) Una molla ideale, di massa trascurabile e costante elastica $k = 45\ N/m$, è ferma su un piano orizzontale liscio. A un estremo è attaccata una massa $m = 100\ g$ mentre l'altro estremo è lasciato libero. Una seconda massa m si muove sullo stesso piano con velocità $v = 3\,m/s$ diretta lungo l'asse della molla fino a urtarla nell'estremo libero. Calcolare: a) la quantità di moto del sistema dopo l'urto; b) l'energia immagazzinata nella molla nell'istante di massima compressione; c) la massima compressione della molla.
Raggiunta la massima compressione, la molla torna a distendersi fino ad acquisire nuovamente la lunghezza a riposo. In quell'istante la massa che l'ha urtata si stacca e prosegue il suo moto liberamente. d) Calcolare la velocità delle due masse dopo il distacco.

4) Tre bambini, di massa m_1, m_2 ed m_3, giocano su di un'altalena schematizzabile come un'asta omogenea di massa $m_a = 100\ Kg$ poggiante in O su di un perno centrale di massa trascurabile con quattro seggiolini posti simmetricamente a distanza *2/3L e L* con *L =1.5 m* dal perno (vedi figura). Sapendo che le masse di due dei tre bambini valgono m_1 = 25 kg e m_2 = 17 kg, calcolare:



a) la massa m_3 del terzo affinché l'altalena sia in equilibrio;
b) la reazione vincolare del perno sull'asta dell'altalena;
c) il momento di inerzia del sistema rispetto ad un'asse perpendicolare all'asta passante per O.

Se m_3 scende dall'altalena, calcolare:

d) la distanza del centro di massa del sistema dal perno lungo l'asta.

5) Discutere il concetto di energia meccanica specificando a quali sistemi meccanici è applicabile.

6) Commentare la seconda equazione cardinale nel caso di sistemi meccanici rigidi rotanti attorno ad un asse fisso.

Termodinamica

1) Un gas monoatomico, in uno stato iniziale con temperatura $T_0 = 300\,^\circ K$ e pressione $p_0 = 15\,atm$, si espande attraverso una trasformazione adiabatica quasi statica dimezzando il valore della pressione. Determinare la temperatura finale.

2) Una macchina di Carnot lavora tra due serbatoi di calore di temperatura $T_H = 800\,^\circ K$ e $T_L = 400\,^\circ K$ cedendo, al serbatoio freddo, una frazione di calore $Q_L = 10000\,J$. Determinare il rendimento termodinamico della macchina ed il lavoro compiuto in un ciclo.

3) Si commenti in dettaglio il concetto di entropia.

SOLUZIONI

Meccanica

Quesito 1)

Riferimento con l'origine sulla verticale al suolo dell'aereo al momento dello sgancio

Coordinate della massa sganciata

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \qquad x = v_0 t$$

Cooordinate della massa sganciata al suolo

$$y_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad t = \sqrt{\frac{2 y_0}{g}} \qquad x = v_0 \sqrt{\frac{2 y_0}{g}}$$

Quindi la distanza tra le verticali vale

$$x = 900 \frac{1000m}{3600s} \sqrt{\frac{2 \times 2000m}{9.81 m/s^2}} = 5048,2m$$

Quesito 2)

a)

La forza si ottiene facendo il gradiente (cambiato di segno) dell'energia potenziale:

$$\vec{F} = -\vec{\Delta} V \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} F_x = -\dfrac{\delta V}{\delta x} = 0 \\ F_y = -\dfrac{\delta V}{\delta y} = -2\alpha y \\ F_z = -\dfrac{\delta V}{\delta z} = 0 \end{cases}$$

(scusate il simbolo rovesciato per il gradiente, ma non ho trovato niente di meglio!)

b)

L'accelerazione a cui è soggetto il corpo è

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(0, \frac{-2\alpha y}{m}, 0 \right) \quad \text{che in coordinate cartesiane diventa} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\dfrac{2\alpha}{m} y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Poiché lungo x e z l'accelerazione è nulla si ha un moto rettilineo uniforme, mentre lungo y si ha

$$F_y = m a_y = -2\alpha y$$

che conduce ad un'equazione differenziale del tipo

$$m\ddot{y} = -2\alpha y \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{2\alpha}{m} y = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$$

caratteristica di un moto armonico:

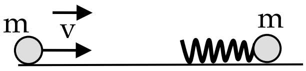
le equazione del moto sono dunque $\begin{cases} x(t) = x_o + v_{ox}t \\ y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}\, t + \varphi_0\right) \\ z(t) = z_o + v_{oz}t \end{cases}$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $\begin{cases} x(t) = x_o + v_o t \\ y(t) = y_o \cos\left(\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}\, t\right) \\ z(t) = z_o \end{cases}$

Quesito 3)

a)

La quantità di moto del sistema si conserva in quanto la risultante delle forze esterne è nulla (il sistema è isolato) poichè la forza gravitazionale è equilibrata dalla reazione vincolare del tavolo:



$\vec{Q}_{in} = \vec{Q}_{fin}$

dove $\vec{Q}_{in} = m\vec{v}$

da cui segue che $\vec{Q}_{fin} = m\vec{v} = 0.3\ Kgm/s$

b)

Nell'istante di massima compressione le due masse si muovono alla stessa velocità (che coincide con la velocità del centro di massa) e possiamo ancora applicare la conservazione della quantità di moto poiché la forza della molla è una forza interna al sistema; come istante iniziale scegliamo quello in cui la molla è ferma (come fatto nel punto a) e come istante finale ovviamente quello di massima compressione della molla:

$\vec{Q}_{ini} = \vec{Q}_{fin} \quad \rightarrow \quad m\vec{v} = m\vec{v}' + m\vec{v}' = 2m\vec{v}'$ da cui si ricava la velocità $\vec{v}'$ delle due masse data da:

$\vec{v}' = \dfrac{\vec{v}}{2} = 1.5\ m/s$

il moto delle due masse è rettilineo ed equiverso e dunque il simbolo di integrale può anche essere omesso.

Essendo presenti solo forze conservative, possiamo conservare anche l'energia meccanica:

$E_{ini} = E_{fin} \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}mv'^2 + \dfrac{1}{2}mv'^2 + E_{molla} = \dfrac{1}{4}mv^2 + E_{molla}$ da cui

$E_{molla} = \dfrac{1}{4}mv^2 = 0.225\ J$

dove E_{molla} è l'energia immagazzinata nella molla che altro non è che la sua energia potenziale.

c)

La massima compressione della molla è data da:

$$E_{molla} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2E_{molla}}{k}} = 0.1\,m$$

d)

Nell'istante del distacco la molla non possiede energia potenziale poiché si trova alla sua lunghezza di riposo. Applicando la conservazione della quantità di moto e dell'energia tra l'istante iniziale (quello prima dell'urto) e l'istante finale (quello del distacco) si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{Q}_{ini} = \vec{Q}_{fin} \quad \rightarrow \quad m\vec{v} = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' \\ E_{ini} = E_{fin} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} v = v_1' + v_2' \\ v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

(i segni di vettori sono stati omessi poichè il moto delle due masse ha la stessa direzione)

le soluzioni sono:

$$\begin{cases} v_1' = v \\ v_2' = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v \end{cases}$$

dove la prima si riferisce alla situazione iniziale (come se le 2 masse non si fossero scontrate), mentre la seconda prevede l'urto dove, avendo la stessa massa, la particella urtante si ferma e l'altra acquisisce la sua velocità.

Quesito 4)

a)

In assenza di forze dissipative le reazioni vincolari compiono lavoro nullo; dal punto di vista dell'energia meccanica, il disco può dunque essere trattato come se fosse soggetto solamente alla forza peso.
La perdita di energia potenziale per la caduta di un tratto *L* si converte dunque tutta quanta in energia cinetica calcolabile mediante il teorema di Koenig, cioè:

$$MgL = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

dove I_{cm} è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa, dato da

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{e}$$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R}$$

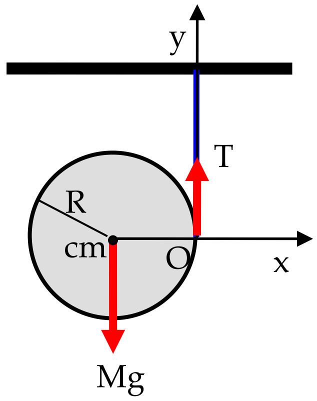
per cui si ottiene

$$MgL = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{4}MR^2\frac{v_{cm}{}^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv_{cm}{}^2$$

da cui $v_{cm} = \sqrt{\dfrac{4gl}{3}}$ o equivalentemente $\omega = \sqrt{\dfrac{4gl}{3R^2}}$

b)

Applichiamo la seconda equazione cardinale della dinamica prendendo come origine il punto O della figura a lato in modo da rendere nullo il momento della forza della tensione del filo della quale non conosciamo il valore:



$$\vec{M}_O = I_O \vec{\alpha}$$

dove $I_O = I_{cm} + MR^2 = \dfrac{3}{2}MR^2$

e $\vec{M}_O = -R\,\hat{i} \times -Mg\,\hat{j} = RMg\,\hat{k}$ da cui

$\vec{\alpha} = \dfrac{2g}{3R}\hat{k}$ o se vogliamo l'accelerazione del cm $|\vec{a}_{cm}| = |\vec{\alpha}|R = \dfrac{2g}{3}$

c)

Dalla prima equazione cardinale della dinamica si ottiene,

$\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$ con $\vec{F}$ risultante delle forze esterne → $-Mg + T = -Ma_{cm}$, dove sono stati omessi i simboli di vettori poiché tutto è diretto lungo l'asse y (a_{cm} ha segno negativo perchè opposto all'asse y), da cui si ottiene

$$T = M\left(-a_{cm} + g\right) = Mg\left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3}Mg$$

Termodinamica

1)

$$0 = nc_V dT + pdV \qquad pdV + Vdp = nRdT$$

$$pdV = nRdT - Vdp$$

$$0 = nc_V dT + nRdT - Vdp = nc_V dT + nRdT - \frac{nRT}{p}dp$$

$$0 = (c_V + R)\frac{dT}{T} - R\frac{dP}{P} \qquad 0 = \frac{dT}{T} - \frac{R}{(c_V + R)}\frac{dP}{P}$$

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{(c_V+R)}} \qquad T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{(c_V+R)}} = 300\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2}}} = 227.4^\circ K$$

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{400}{800} = 0.5$$

2) $$\eta = \frac{L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \qquad Q_H = \frac{Q_L}{1-\eta} \qquad L = Q_H \eta = \frac{Q_L}{1-\eta}\eta = \frac{10000}{0.5} 0.5 = 10000$$