Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 20 Luglio 2018

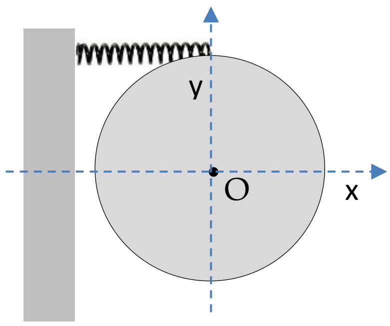
Meccanica

Q1) Un aereo, in volo con velocità costante di modulo $v_0 = 800\,km/h$ ad una quota $h_0 = 2500\,m$, lascia cadere una massa *m* che deve colpire un punto al suolo che giace sulla parallela alla propria traiettoria. Determinare la distanza tra la verticale dell'aereo al momento del lancio e quella del bersaglio.

Q2) Un corpo materiale di massa m si muove lungo una traiettoria circolare per effetto di una forza centrale data dalla espressione $\vec{f}_c = -kR\,\vec{i}_R$. Trovare il periodo T dell'orbita.

Q3) Un corpo materiale inizialmente fermo scivola lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Il piano non è liscio e agisce sul corpo materiale con forza di attrito viscoso $\vec{f}_a = -\lambda\vec{v}$ Determinare la velocità del corpo materiale in funzione del tempo e la velocità di regime.

Q4) Una molla di costante elastica K in posizione di riposo è ancorata ad una parete ed alla sommità di un disco rigido ed omogeneo di massa M e raggio R, libero di ruotare attorno ad un asse normale al piano del disco e passante per il suo centro O. Determinare il periodo di oscillazione del disco quando la sua sommità viene spostata di una piccola quantità x.



Q5) Discutere le forze inerziali e mostrare i passaggi che conducono alla determinazione della loro espressione.

Q6) Dimostrare il teorema del centro di massa $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$.

Termodinamica

1) Un gas monoatomico, in uno stato iniziale con temperatura $T_0 = 300\,^\circ K$ e pressione $p_0 = 15\,atm$, si espande attraverso una trasformazione adiabatica quasi statica dimezzando il valore della pressione. Determinare la temperatura finale.

2) Una macchina di Carnot lavora tra due serbatoi di calore di temperatura $T_H = 800\,^\circ K$ e $T_L = 400\,^\circ K$ cedendo, al serbatoio freddo, una frazione di calore $Q_L = 10000\,J$. Determinare il rendimento termodinamico della macchina ed il lavoro compiuto in un ciclo.

3) Enunciare il secondo principio nella forma di Clausius e Kelvin-Plank e dimostrare la loro equivalenza.

SOLUZIONI

Q1

Riferimento con l'origine sulla verticale al suolo dell'aereo al momento dello sgancio

Coordinate della massa sganciata

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \qquad x = v_0 t$$

Cooordinate della massa sganciata al suolo

$$y_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad t = \sqrt{\frac{2 y_0}{g}} \qquad x = v_0 \sqrt{\frac{2 y_0}{g}}$$

Quindi la distanza tra le verticali vale

$$x = 800 \frac{1000 m}{3600 s} \sqrt{\frac{2 \times 2500 m}{9.81 m / s^2}} = 5016{,}9 m$$

Q2

$$-kR \vec{i}_R = -m \frac{v^2}{R} \vec{i}_R \qquad kR^2 = m\omega^2 R^2 \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Il periodo non dipende dal raggio dell'orbita.

Q3

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

introducendo la coordinata z lungo il piano inclinato si ha

$$mg\sin\alpha - \lambda \dot{z} = m\ddot{z} \qquad (g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z}) = \frac{d\dot{z}}{dt} \qquad dt = \frac{d\dot{z}}{(g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z})} \qquad -\frac{\lambda}{m} dt = \frac{d(g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z})}{(g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z})}$$

$$fer - \frac{\lambda}{m}\int_0^t dt = \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}(t)} \frac{d(g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z})}{(g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z})} \qquad -\frac{\lambda}{m} t = \ln\left(\frac{g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z}(t)}{g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z}_0}\right) \qquad g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z}(t) = (g\sin\alpha - \frac{\lambda}{m}\dot{z}_0) e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

tenendo conto che il corpo materiale parte da fermo si ha

$$\dot{z}(t) = \frac{mg\sin\alpha}{\lambda}(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t})$$

con la velocità di regime

$$\dot{z}(\infty) = \frac{mg\sin\alpha}{\lambda}$$

Q4)

La seconda equazione cardinale per i sistemi rigidi rotanti attorno da assi fissi afferma che

$$\hat{\omega}\cdot\vec{M}^{e}=I_{\hat{\omega}}\ddot{\varphi}$$

nel caso in esame per piccoli spostamenti si ha

$$\vec{k}\cdot\left[R\,\vec{j}\wedge\ -Kx\,\vec{i}\ \right]=\frac{1}{2}MR^{2}\ddot{\varphi}$$

mentre spostamento elementare della sommità del disco ed angolo di rotazione sono correlate dalla seguente relazione

$$-R\,d\varphi=dx\qquad -R\,\ddot{\varphi}=\ddot{x}$$

abbiamo allora

$$K\,x\,R=-\frac{1}{2}M\,R^{2}\,\frac{\ddot{x}}{R}$$

da cui l'equazione del moto

$$\ddot{x}=-\frac{2K}{M}x$$

sostituendo

$$x=A\cos(\omega t)$$

otteniamo

$$-A\omega^{2}\cos(\omega t)=-\frac{2K}{M}A\cos(\omega t)$$

da cui

$$\omega=\sqrt{\frac{2K}{M}}$$

Termodinamica

Q1)

$$0=nc_{V}dT+pdV\qquad pdV+Vdp=nRdT$$
$$pdV=nRdT-Vdp$$

$$0=nc_{V}dT+nRdT-Vdp=nc_{V}dT+nRdT-\frac{nRT}{p}dp$$

$$0=(c_{V}+R)\frac{dT}{T}-R\frac{dP}{P}\qquad 0=\frac{dT}{T}-\frac{R}{(c_{V}+R)}\frac{dP}{P}$$

$$\ln\frac{T_{2}}{T_{1}}=\ln\left(\frac{P_{2}}{P_{1}}\right)^{\frac{R}{(c_{V}+R)}}\qquad T_{2}=T_{1}\left(\frac{P_{2}}{P_{1}}\right)^{\frac{R}{(c_{V}+R)}}=300\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1+\frac{3}{2}}}=227.4^{\circ}K$$

Q2)

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{400}{800} = 0.5$$

$$\eta = \frac{L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \qquad Q_H = \frac{Q_L}{1-\eta} \qquad L = Q_H \eta = \frac{Q_L}{1-\eta}\eta = \frac{10000}{0.5}0.5 = 10000$$