Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 1 Luglio 2009
Prof. Nicola Semprini Cesari

Quesiti

---

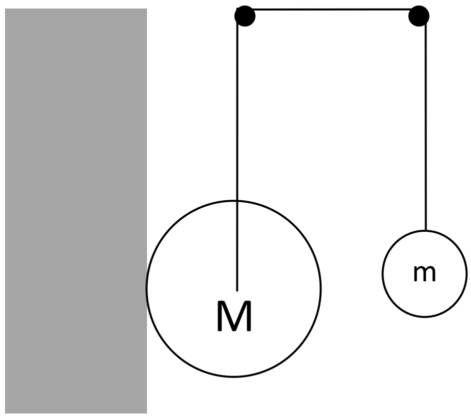
1) Un punto materiale si muove nel piano verticale secondo le equazioni orarie $y = v_{0y}t$, $z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2$. Calcolare, nel punto in cui arriva a terra (si scelga il punto di ascissa maggiore), l'angolo che l'accelerazione forma con la tangente alla traiettoria.

2) La tensione fornita dal filo di un pendolo di massa *m* e lunghezza *l* nel momento in cui la massa raggiunge la massima quota vale *mg/2*. Calcolare modulo direzione e verso della tensione del filo nel punto di minima quota.

3) Un punto materiale di massa *m=*π *Kg*, soggetto alla sola azione della forza posizionale $\vec{f} = k\,\vec{i}_\phi$, si muove lungo una guida circolare priva di attrito di raggio *R=2m*, disposta nel piano *xy* con il centro nella origine (si noti che la forza è sempre collineare con lo spostamento). Calcolare il valore di *k* sapendo che la velocità iniziale del punto materiale è nulla e che dopo un giro completo vale *v=4 m/s*.

4) Ai capi di una asticella di massa trascurabile e lunghezza *L* sono fissate due masse puntiformi di valore *m* ed *2m*. Appoggiata su di un piano orizzontale privo di attrito l'asticella ruota con velocità angolare costante ω_0. Determinare la tensione esercitata dall'asticella sulla massa *m*.

5) Calcolare l'accelerazione della massa *m* nella ipotesi che il disco omogeneo di massa *M* e raggio *R* rotoli senza strisciare e che lo scorrimento del filo sui pioli sia privo di attrito.



6) Dimostrare la relazione di Poisson $\frac{d}{dt}\vec{i} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$.

7) Dimostrare che in un sistema rigido di punti materiali vale la relazione $\vec{L}_\Omega = \vec{L}^* + \vec{r}_{cm,\Omega} \wedge M\,\vec{v}_{cm}$.

8) Enunciare e commentare le equazioni cardinali della meccanica.

Soluzioni

1)

$$y = v_{0y}t;\ \ z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \textit{punto di atterraggio} \qquad z = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \textit{da cui} \quad t = \frac{2v_{0z}}{g}$$

abbiamo allora

$$\dot{x} = 0;\ \ \dot{y} = v_{0y};\ \ \dot{z} = v_{0z} - g(\frac{2v_{0z}}{g}) = -v_{0z} \qquad \vec{v} = v_{0y}\vec{j} - v_{0z}\vec{k}$$

$$\ddot{x} = 0;\ \ \ddot{y} = 0;\ \ \ddot{z} = -g \qquad \vec{a} = -g\vec{k}$$

$$\vartheta = ar\cos(\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|}) = ar\cos(\frac{g\,v_{0z}}{g\sqrt{v_{0y}^2 + v_{0z}^2}}) = ar\cos(\frac{v_{0z}}{\sqrt{v_{0y}^2 + v_{0z}^2}})$$

2)

$$\textit{punto di massima quota} \qquad T_1 - mg\cos\phi_1 = \frac{1}{2}mg - mg\cos\phi_1 = m\frac{v_1^2}{l} = 0 \quad \textit{da cui} \quad \cos\phi_1 = \frac{1}{2}$$

$$\textit{punto di minima quota} \qquad T_2 - mg = m\frac{v_2^2}{l} \qquad \textit{dove} \quad mgl(1-\cos\phi_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \textit{da cui} \quad v_2^2 = gl$$

$$\textit{otteniamo allora} \quad T_2 = mg + m\frac{v_2^2}{l} = mg + mg = 2mg$$

3)

$$\vec{f} = k\,\vec{i}_\phi$$

$$\int_A^B \vec{f}\cdot d\,\vec{s} = T_B - T_A \qquad \int_{\phi_0}^{\phi_0+2\pi} (k\,\vec{i}_\phi\,)\cdot(R\,d\phi\,\vec{i}_\phi) = 2\pi R k = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\textit{da cui} \qquad k = \frac{1}{4}\frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{\pi R} = \frac{\pi\times 16}{4\times\pi\times 2} = 2N$$

4)

Essendo nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema il suo centro di massa deve essere in quiete. D’altra parte il sistema è posto in rotazione per cui non può che ruotare attorno ad un asse passante per il centro di massa. Questo significa che le masse descrivono cerchi di raggio pari alle loro distanze dal centro di massa:

scegliendo un asse con l'origine sulla prima massa si ha $\vec{r}_1 = \vec{0}$ *e* $\vec{r}_2 = L\vec{i}$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m\vec{r}_1 + 2m\vec{r}_2}{m + 2m} = \frac{2}{3}L\vec{i} \qquad r_1^* = |\vec{r}_1 - \vec{r}_{cm}| = \frac{2}{3}L$$

$$\textit{la forza vale allora} \qquad \vec{f}_1 = m\,\omega_0^2\,r_1^*\,\vec{i} = m\,\omega_0^2\,\frac{2}{3}L\,\vec{i}$$

5)

Dalle equazioni cardinali valide per il disco e dalla equazione di Newton valida per il punto materiale si ha il sistema

$T + T_a - Mg = M\ \ddot{y}_1$

$se \quad \vec{\omega} = \vec{k} \quad allora \quad (-R\vec{i}\,) \wedge (T_a\ \vec{j}\,) \cdot \vec{k} = I\,\ddot{\phi} \qquad da\ cui$

$-R\ T_a = I\,\ddot{\phi}$

$T - mg = m\ddot{y}_2$

$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

$\ddot{\phi}R = \ddot{y}_1$

dopo qualche semplice sostituzione si ha $\ddot{y}_2 = \dfrac{M-m}{\dfrac{I}{R^2} + M + m}\,g = \dfrac{M-m}{\dfrac{3}{2}M + m}\,g$