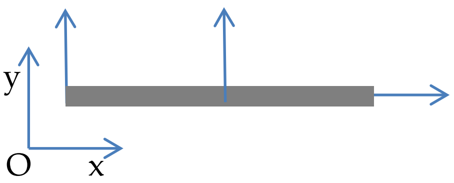
Fisica Generale LA

N.1

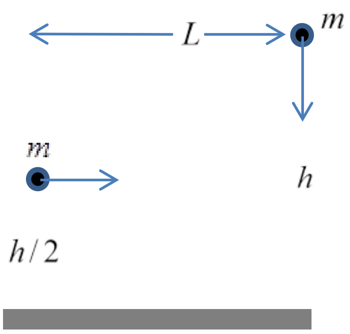
Prova Scritta del 22 Luglio 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Tre forze di eguale modulo F sono applicate ai capi e nel punto di mezzo di una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L. Ipotizzando che XY sia un piano orizzontale privo di attrito su cui appoggia la sbarra determinare il vettore $\vec{a}_{CM}$.



2) Un proiettile di massa m viene scagliato orizzontalmente ad una quota $h/2$ con velocità v_0 mentre un secondo proiettile di massa m viene lasciato cadere da una quota doppia h. Determinare l'intervallo temporale che deve intercorrere tra tali azioni affinché il primo proiettile colpisca il secondo.



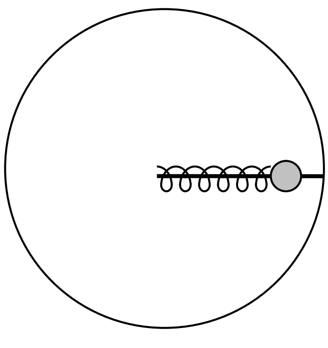
3) Stabilire se è conservativo il campo di forza $\vec{f}(\vec{r}) = -\alpha \dfrac{\vec{r}}{r^2}$, dove $\vec{r}$ è il vettore posizionale del generico punto P rispetto all'origine O di un riferimento cartesiano $Oxyz$ e α è una costante, e in caso affermativo calcolare il lavoro da esso compiuto per uno spostamento del punto di applicazione della forza dal punto A di coordinate (0,1,0) al punto B di coordinate (2,0,0).

4) Dato un rettangolo metallico di lati a e b ($a>b$) e densità superficiale di massa σ calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse coincidente con il lato minore.

5) Commentare le proprietà del riferimento del centro di massa. Mostrare che le forze inerziali non contribuiscono al bilancio del momento totale delle forze esterne.

Meccanica: problema

Una piattaforma circolare ruota con velocità angolare costante ω attorno ad un asse normale passante per il suo centro. Solidale con la piattaforma, in direzione radiale, è fissata una guida priva di attrito sulla quale scorre una massa puntiforme m a sua volta attaccata all'estremo libero di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo L. Determinare la posizione di equilibrio della massa.



SOLUZIONI

MECCANICA

1)

$$\vec{F}_T = F\,\vec{j} + F\,\vec{j} + F\,\vec{i} = F\,\vec{i} + 2F\,\vec{j} = M\,\vec{a}_{CM} \qquad \vec{a}_{CM} = \frac{F}{M}\vec{i} + \frac{2F}{M}\vec{j}$$

2)

$$\begin{cases} x_1 = vt \\ y_1 = \dfrac{h}{2} - \dfrac{1}{2} g\, t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1^* = \dfrac{L}{v} \\ y_1^* = \dfrac{h}{2} - \dfrac{1}{2} g \dfrac{L^2}{v^2} \end{cases}$$

$$y_2 = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

$$y_2 = y_1^* \qquad h - \frac{1}{2} g\, t_2^{*2} = \frac{h}{2} - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v^2} \qquad t_2^* = \sqrt{\frac{h}{g} + \frac{L^2}{v^2}}$$

$$t_2^* - t_1^* = \sqrt{\frac{h}{g} + \frac{L^2}{v^2}} - \frac{L}{v}$$

3)

Scrivendo la forza in termini dei componenti cartesiane si verifica che il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Il lavoro compiuto dalla forza, diretta radialmente, è nullo lungo la traiettoria circolare con centro in *O* lungo la quale, con raggio r=1 nel piano *xy*, si sposta il punto di applicazione da A = (0,1,0) a A'= (1,0,0). Resta da calcolare il lavoro compiuto per spostare il punto di applicazione da A' a B che si riduce alla integrazione lungo l' asse x (quindi con y e z nulle) ottenendo

$$\int_{(1,0,0)}^{(2.0,0)} -\frac{\alpha(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \bullet dx\vec{i}}{x^2 + y^2 + z^2} \equiv -\alpha \int_1^2 \frac{dx}{x} = -\alpha \ln 2 .$$

4)

$$I_{\hat{\omega}} = \int_0^a \int_0^b x^2\, \sigma\, dx\, dy = \sigma \int_0^a x^2\, dx \int_0^b dy = \sigma \frac{1}{3} a^3 b = \frac{1}{3} M\, a^2$$

Problema

L'unica forza inerziale agente nella direzione della guida è la seguente (scritta rispetto ad una terna cilindrica solidale con la piattaforma ed avente l'origine nel centro della stessa)

$$\vec{F}_{inerziali} = -m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = m\omega^2 r\, \vec{i}_r$$

la forza fornita dalla molla (lungo la guida) vale

$$\vec{F}_{molla} = -k(r - L)\,\vec{i}_r$$

si ha equilibrio quando $m\omega^2 r\,\vec{i}_r - k(r-L)\,\vec{i}_r = \vec{0}$ $r = L/1-\dfrac{m\omega^2}{k}$

(si noti che esiste una relazione di consistenza della formula $\dfrac{m\omega^2}{k} < 1$ la quale indica che se la rotazione è troppo rapida o la massa troppo grande non esiste alcuna posizione di equilibrio poiché la forza centrifuga risulta sempre più grande della forza fornita dalla molla).