Fisica Generale LA **N.1**

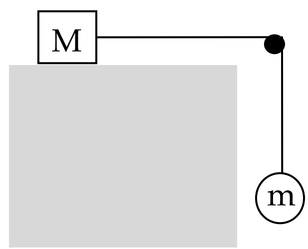
Prova Scritta del 3 Febbraio 2010
Prof. Nicola Semprini Cesari

Quesiti

1) Sia dato un sistema di riferimento *Oxy* in moto rototraslatorio rispetto al sistema *O′x′y′*. Sapendo che, al tempo $t = t_0$ le coordinate di *O* rispetto ad *O′* sono espresse dal vettore $(3,4)$, gli assi *x* e *y* sono ruotati di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto ai corrispondenti assi *x′* e *y′* e *Oxy* possiede una velocità angolare $\vec{\omega} = (0,0,\omega_0)$ rispetto al sistema *O′x′y′*, esprimere, nel riferimento *O′x′y′* (e nella notazione dei versori), la velocità del punto *P* del piano identificato dal vettore $\vec{r} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ ed in quiete nel riferimento *Oxy.*

2) Un punto materiale di massa *m*, in moto lungo l'asse *x* di un riferimento *Oxy*, è soggetto all'azione di una forza $f = -\Lambda \dot{x}^2$. Fornire l'espressione della velocità in funzione del tempo nella ipotesi che v_0 sia il suo valore al tempo *t=0*.

3) Sapendo che la massa *M=4Kg* trasla senza attrito sulla superficie di appoggio, determinare il valore di *m* affinchè la sua accelerazione sia diretta verso il basso e valga *g/2*.



4) Spiegare e commentare in che modo viene introdotto in meccanica il concetto di massa gravitazionale.

5) Commentare il principio di azione e reazione e fornire i passaggi matematici che conducono alla sua formulazione matematica (circa 1 pagina).

Problema

Un astronauta in fase di preparazione si muove sulla superficie di una piattaforma orizzontale priva di attrito, solidale ad un riferimento terrestre da considerarsi inerziale. Egli è legato a una fune di lunghezza l_1 e massa trascurabile. La fune passa attraverso un foro al centro della piattaforma ed è fissata al disotto di questa. L'astronauta, trattenuto dalla fune, ruota con velocità angolare ω_1. A un certo istante la corda viene accorciata a una lunghezza $l_2 < l_1$; sia ω_2 la velocità angolare dell'astronauta in questa nuova configurazione. Trattando l'astronauta come un punto materiale di massa *m*, si calcolino:

a) l'espressione della tensione della fune quando la velocità angolare è ω_1;

b) l'espressione della velocità angolare ω_2;

c) l'espressione del lavoro compiuto per accorciare la fune dalla lunghezza l_1 alla lunghezza l_2;

d) se, mentre l'astronauta si muove lungo la circonferenza di raggio l_2, la fune si spezzasse sotto l'azione di forze interne, determinare, in funzione di ω_1, l_1 ed l_2, l'espressione del modulo della velocità assunta dall'astronauta in tale circostanza.

Soluzioni

Quesito 1

$$\vec{v}_{OO'} = 3\vec{i}\,' + 4\vec{j}\,' \qquad \vec{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}\,' + \frac{1}{2}\vec{j}\,' \qquad \vec{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\,' - \frac{1}{2}\vec{i}\,'$$

$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}_{OO'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r} = 3\vec{i}\,' + 4\vec{j}\,' + \omega_0\vec{k}\,'\wedge(4\vec{i} + 5\vec{j}) =$$

$$= 3\vec{i}\,' + 4\vec{j}\,' + \omega_0\vec{k}\,'\wedge[4(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}\,' + \frac{1}{2}\vec{j}\,') + 5(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\,' - \frac{1}{2}\vec{i}\,')] =$$

$$= 3\vec{i}\,' + 4\vec{j}\,' + \omega_0\vec{k}\,'\wedge[\frac{4\sqrt{3}-5}{2}\vec{i}\,' + \frac{5\sqrt{3}+1}{2}\vec{j}\,'] =$$

$$= 3\vec{i}\,' + 4\vec{j}\,' + \omega_0\frac{4\sqrt{3}-5}{2}\vec{j}\,' - \omega_0\frac{5\sqrt{3}+1}{2}\vec{i}\,' =$$

$$= (3 - \omega_0\frac{5\sqrt{3}+1}{2})\vec{i}\,' + (4 + \omega_0\frac{4\sqrt{3}-5}{2})\vec{j}\,'$$

Quesito 2

$$-\Lambda\dot{x}^2 = m\frac{d\dot{x}}{dt} \qquad \int_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)}\frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{\Lambda}{m}\int_0^t dt \qquad [-\frac{1}{\dot{x}}]_{\dot{x}(0)}^{\dot{x}(t)} = -\frac{\Lambda}{m}t \qquad \dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(0)}{1+\dot{x}(0)\frac{\Lambda}{m}t} \qquad \dot{x}(t) = \frac{v_0}{1+v_0\frac{\Lambda}{m}t}$$

Quesito 3

$$T - mg = m\ddot{z}$$

$$T = M\ddot{y} \qquad \ddot{z}_2 = -\frac{m}{M+m}g \qquad -\frac{g}{2} = -\frac{m}{M+m}g \qquad m = M = 4Kg$$

$$\ddot{z} = -\ddot{y}$$

Quesito 4

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2\alpha y = \frac{\partial F_y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 2\alpha x = \frac{\partial F_z}{\partial x};$$ il campo è conservativo.

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 2\alpha z = \frac{\partial F_z}{\partial y};$$

$$V = -U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} F_x\,dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} F_y\,dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} F_z\,dz\right) = -\alpha\left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right)$$

$$[\alpha]=\left[ML^{-2}T^{-2}\right]\Rightarrow \frac{N}{m^3}$$

Problema

a) $T = m\dfrac{v_1^2}{l_1} = m\omega_1^2 l_1$

b) $K = mvl = m\omega l^2 = \cos t \Rightarrow m\omega_1 l_1^2 = m\omega_2 l_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^2$

c)
$$L = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}ml_2^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}ml_1^2\omega_1^2 = \frac{1}{2}m\left[l_2^2\omega_2^2 - l_1^2\omega_1^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}m\left[l_2^2\omega_1^2\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^4 - l_1^2\omega_1^2\right] = \frac{1}{2}ml_1^2\omega_1^2\left[\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 - 1\right]$$

d) $v_2 = \omega_2 l_2 = \omega_1\dfrac{l_1^2}{l_2^2}l_2 = \omega_1\dfrac{l_1^2}{l_2}$