# Fisica Generale LA N.1

**Prova Scritta del 21 Gennaio 2011**
**Prof. Nicola Semprini Cesari**

## Meccanica: quesiti

1) La posizione di un punto materiale è espressa dal vettore $\mathbf{r} = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\sin\omega t\,\mathbf{j}$. Calcolare le espressioni dei vettori velocità ed accelerazione. Calcolare i loro moduli.

2) Due punti materiali $P_1$ e $P_2$, aventi rispettivamente massa $m_1$ e $m_2$, sono inizialmente tenuti in quiete a distanza $r_0$ e soggetti esclusivamente alla reciproca attrazione gravitazionale. Calcolare le espressioni dei moduli delle velocità $v_1$ e $v_2$ assunte dai due punti materiali in funzione della loro distanza istantanea $r$, nel caso in cui i due punti vengano lasciati liberi con velocità iniziale nulla.

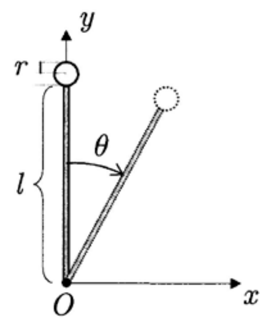
3) Verificare se il campo di forze $\bar{F} = -\alpha\,\{\,(2xz + z^2)\,\bar{i} + 3\,y^2\,\bar{j} + (\,x^2 + 2xz\,)\,\bar{k}\,\}$ è conservativo. In caso affermativo calcolare l'espressione dell'energia potenziale.

4) Spiegare e commentare in dettaglio la definizione di lavoro meccanico di una forza.

5) Dimostrare il teorema del momento della forza (nel caso di un punto materiale).

## Meccanica: problema

Un'asta omogenea ha lunghezza $l$, spessore trascurabile e massa $m_a$. Ad una sua estremità è fissato un disco omogeneo di raggio $r$ e massa $m_d$, mentre l'altra estremità è vincolata ad un asse ortogonale al piano della Figura e passante per il punto $O$, asse attorno al quale l'asta può ruotare con attrito trascurabile nel piano verticale. L'asta, che si trova inizialmente nella posizione d'equilibrio instabile, ad un dato istante comincia a cadere in seguito a una lieve perturbazione.




Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:
a) il momento d'inerzia totale $I_O$ del sistema rispetto all'asse orizzontale passante per $O$;
b) la coordinata $y_G$ del centro di massa del sistema nella condizione iniziale di equilibrio instabile;
c) la massima velocità angolare $\omega_{max}$ assunta dal sistema in funzione di $m_a$, $m_d$, $I_O$, $y_G$ e del modulo dell'accelerazione di gravità $g$.

**Termodinamica: problema**

Un cilindro con pistone, costituiti entrambi da un materiale buon conduttore di calore, contiene tre moli di gas perfetto che si espandono isotermicamente da una pressione iniziale $P_1=2\ atm$ ad una pressione finale $P_2=1\ atm$. Il sistema, in contatto con l'atmosfera che esercita su di esso una pressione costante $P_0=1\ atm$, è sempre in equilibrio termico con la stessa alla temperatura $T=20\ ^0C$. La forza di attrito agente sul pistone è tale da assicurare una espansione quasi statica del gas (la somma della forza di attrito e delle forze derivanti dalla pressione del gas e della atmosfera, tende ad annullarsi).
Determinare i) la variazione di entropia del gas; ii) il lavoro compiuto dal gas sull'atmosfera; iii) il calore ceduto dall'atmosfera al gas; iv) la variazione di entropia dell'atmosfera; v) la variazione di entropia totale del processo.

SOLUZIONI

Q1

$$\vec{r} = R\cos\omega t\ \vec{i} + R\sin\omega t\ \vec{j}$$
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\omega R\sin\omega t\ \vec{i} + \omega R\cos\omega t\ \vec{j}$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -\omega^2 R\cos\omega t\ \vec{i} - \omega^2 R\sin\omega t\ \vec{j}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \omega R$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \omega^2 R$$

Q2

*il sistema è isolato e soggetto unicamente a forze conservative, ergo:*

$(1/2)\ (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \gamma\, m_1 m_2 / r = -\gamma\, m_1 m_2 / r_0$ *(conservazione energia meccanica)*
$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = \bar{0}$ *( conservazione quantità di moto)*

*Passando ai moduli (data la centralità della forza), la seconda equazione diventa*

$v_2 = (m_1 / m_2)\ v_1$ *da cui*

$$v_1 = m_2 \{\ [2\gamma / (m_1 + m_2)]\ (1/r - 1/r_0)\ \}^{1/2}$$
$$v_2 = m_1 \{\ [2\gamma / (m_1 + m_2)]\ (1/r - 1/r_0)\ \}^{1/2}$$

Q3 $U = \alpha\ (x^2 z + y^3 + z^2 x)$

**Soluzione problema**

a) $I_0 = m_a l^2/3 + (1/2)\ m_d r^2 + m_d (l + r)^2$

b) $y_G = 1/(m_a + m_d)\ [m_a l/2 + m_d (l + r)]$

c) $\omega_{max}$ *si avrà nella posizione di energia potenziale minima ($\theta = \pi$); applicando la conservazione dell'energia meccanica e la relazione tra energia potenziale della forza peso e quota del centro di massa si ha*

$$(m_a + m_d)\ g\ y_G = (1/2)\ (\omega_{max})^2 - (m_a + m_d) g\ y_G \Rightarrow$$

$$\omega_{max} = [\ 4(m_a + m_d) g\ y_G / I_0\ ]^{1/2}$$

Problema Termodinamica

i)

$$dQ = dU + dL$$
$$TdS = dU + p\,dV$$
$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV \qquad ma\ \ dU = 0\ \ poichè\ la\, trasformazione\ è\ isoterma$$
$$inoltre\ \ pV = nRT \quad da\ cui \quad dV = -\frac{nRT}{p^2}dp$$
$$dS = -nR\frac{dP}{P}$$
$$\Delta S_{gas} = -nR\ ln\frac{P_2}{P_1} = 3\times 8.31\times 0.69 = 17.20\ \ J/K$$

ii)

$$dL = p\,dV = P_0\,dV$$
$$L = P_0\,(V_2 - V_1) \qquad ma\ \ pV = nRT\ \ da\ cui$$
$$L = P_0\,(\frac{nRT}{P_2} - \frac{nRT}{P_1}) = nRT\,P_0\,(\frac{P_1 - P_2}{P_1 P_2}) = nRT\,P_0\,(\frac{P_1 - P_0}{P_1 P_0}) = nRT(\frac{P_1 - P_0}{P_1}) =$$
$$= 3\times 8.31\times 293.15\times\frac{1}{2} = 3654.1\,J$$

iii) Il gas non cambia la sua temperatura per cui dal primo principio (dQ=dL) otteniamo che la trasformazione è tale per cui Q=L. Ma L è positivo (il gas compie lavoro sulla atmosfera) per cui lo è anche Q (il gas acquisisce calore dalla atmosfera). Abbiamo allora che l'atmosfera cede al gas la quantità di calore *Q'=-Q=-L=-3654.1 J*.

iv)

$$dS = \frac{dQ}{T}$$
$$\Delta S_{atm} = \frac{Q'}{T} = \frac{-L}{T} = nRT(\frac{P_1 - P_0}{P_1})\frac{1}{T} = -nR(\frac{P_1 - P_0}{P_1}) = -3\times 8.31\times\frac{1}{2} =$$
$$= -12.47\ J/K$$

v)

$$\Delta S_{proc} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{atm} = 17.20 - 12.47 = 4.73\ \ J/K$$