Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 23 Giugno 2008
Prof. Nicola Semprini Cesari

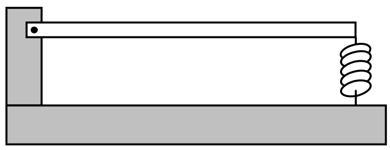
Quesiti

1) Il moto di un punto materiale è descritto dalle equazioni $x = R\cos(\omega t)$; $y = R\sin(\omega t)$; $z = 0$. Determinare l'equazione della traiettoria ed il modulo della velocità.

2) Calcolare il modulo della velocità necessaria affinché un punto materiale lanciato verticalmente raggiunga una quota pari al raggio terrestre R_T.

3) Stabilire se il campo di forze $\vec{F} = \alpha y^2 z^4 \cdot \vec{i} + 2\alpha xyz^4 \cdot \vec{j} + 4\alpha xy^2 z^3 \cdot \vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, il potenziale.

4) Un' asta di lunghezza *L=60cm* e massa *M=12Kg* incernierata ad una parete, è in equilibrio nella posizione orizzontale sostenuta da una molla compressa di una lunghezza $\Delta x = 10\,cm$. Calcolare la costante elastica della molla.



5) Commentare il concetto di momento d'inerzia, spiegare in quali equazione interviene e dedurne l'espressione generale partendo dalla seconda equazione cardinale della meccanica.

Problema

Una giostra è costituita da una piattaforma circolare omogenea e rigida, di massa $\boldsymbol{M}$ e raggio $\boldsymbol{R}$, disposta orizzontalmente e girevole con attrito trascurabile attorno ad un asse verticale passante per il suo centro di massa. Inizialmente un ragazzo di massa $\boldsymbol{M/4}$ è seduto sul bordo della giostra, che ruota liberamente con velocità angolare ϖ_i. Calcolare l'espressione delle seguenti quantità:

a) il momento d'inerzia $\boldsymbol{I_i}$ del sistema rispetto all'asse di rotazione;
b) il momento angolare $\boldsymbol{K}$ del sistema rispetto all'asse di rotazione.

Se il ragazzo si sposta sulla piattaforma fino a raggiungere la distanza $\boldsymbol{R/2}$ dal centro, determinare le espresioni delle seguenti quantità:

c) la velocità angolare finale ϖ_f del sistema;
d) la variazione di energia meccanica del sistema.

Soluzioni

Quesito 1

$x = R\cos(\omega t)$

$y = R\sin(\omega t)$

$z = 0$

si può eliminare il tempo sommando i quadrati delle coordinate

$x^2 + y^2 = R^2$ (la traiettoria è una circonferenza centrata nella origine)

$\dot{x} = -\omega R\sin(\omega t)$

$\dot{y} = \omega R\cos(\omega t)$

$\dot{z} = 0$

$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \omega R$

Quesito 2

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R} \qquad E_{in} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} \qquad E_{fin} = -G\frac{M_T m}{2R_T}$$

$E_{in} = E_{fin}$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{2R_T} \qquad v = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T}}$$

Quesito 3

Il campo è conservativo, avendo rotore nullo. Il potenziale U si ottiene integrando su un cammino a tratti tra l'origine e il punto generico *P(x,y,x):* $U = \alpha x y^2 z^4$

Quesito 4

$$Mg\frac{L}{2} = K\,\Delta x\,L \qquad K = \frac{Mg\,\Delta x}{2} = \frac{12\times 9.81\times 0.1}{2} = 5.89\,N/m$$

Problema

1) $I_i = I_p + I_{ragazzo} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{M}{4}R^2 = \frac{3}{4}MR^2$

2) $K = I_i \cdot \omega_i = \frac{3}{4}MR^2 \cdot \varpi_i$

3) Poiché il sistema è isolato si conserva il momento angolare. Visto che però cambia il momento d'inerzia, deve cambiare anche la velocità angolare, la cui espressione si ricava imponendo:

$I_i\,\omega_i = I_f\,\omega_f$

Con $I_f = I_p + I_{ragazzo} = \frac{MR^2}{2} + \frac{MR^2}{16} = \frac{9}{16}MR^2$, da cui: $\omega_f = \frac{4}{3}\omega_i$

4) L'energia meccanica è in questo caso energia cinetica di rotazione, che si scrive $E = \frac{1}{2}I\varpi^2$

Considerando la situazione iniziale e finale, $\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{2}(I_f\omega_f^2 - I_i\omega_f^2) = \frac{1}{8}MR^2\omega_i^2$

Che è il lavoro fatto dai ragazzi contro la forza centrifuga