Fisica Generale T-A N.1

Prova scritta del 4 Luglio 2011

Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica

Q1) Un pendolo di massa m e lunghezza l è spostato rispetto alla verticale di un certo angolo θ. Calcolare la tensione del filo nel momento in cui transita dalla posizione di equilibrio.

Q2) Determinare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza conservativa $\vec{f} = \alpha\left[(y^2 + 2xz)\vec{i} + (z^2 + 2xy)\vec{j} + (x^2 + 2yz)\vec{k}\right]$ su di un punto materiale di massa m che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato partendo da fermo nell'origine del sistema di riferimento e raggiungendo il punto $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$.

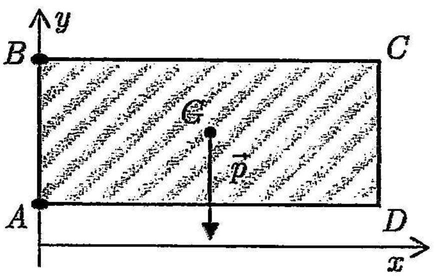
Q3) Calcolare l'espressione del momento d'inerzia di un corpo piano di spessore trascurabile, avente forma di triangolo isoscele con altezza h, base b e massa M uniformemente distribuita sulla sua superficie S rispetto all' asse coincidente con la base.

Q4) Dimostrare una delle relazioni di Poisson.

Q5) Discutere le principali proprietà e leggi che caratterizzano i corpi rigidi.

Problema

Si consideri la superficie metallica costituita dal rettangolo $ABCD$ mostrato in Figura, di lati a=BC e b=CD, vincolato nei punti A e B a un asse verticale (coincidente con l' asse y d'un riferimento cartesiano piano) e soggetto alla forza peso $\vec{p}$.



Sapendo che il centro di massa G si trova all'incrocio delle diagonali del rettangolo determinare, nelle condizioni di equilibrio del sistema, le espressioni delle seguenti grandezze fisiche: a) le componenti orizzontali delle forze $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ esercitate dai vincoli nei punti A e B come reazioni vincolari alla forza peso; b) la risultante delle componenti verticali delle forze $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$.

Soluzioni

Q1

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 \qquad mg\,l\,(1-\cos\vartheta) = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad v_0 = \sqrt{2\,g\,l\,(1-\cos\vartheta)}$$

$$T - mg = m\frac{v_0^2}{l} \qquad T = m\,g\,(3-2\cos\vartheta)$$

Q2

Integrando sul percorso a zig zag da (0,0,0) a (x_0,y_0,z_0) otteniamo

$$L = \int_{0,0,0}^{x_0,0,0} f_x dx + \int_{x,0,0}^{x_0,y_0,0} f_y dy + \int_{x,0,0}^{x_0,y_0,z_0} f_z dz = x_0 y_0^2 + x_0^2 z_0 + y_0 z_0^2 .$$

Q3

$$I = \int_0^h \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} y^2\,\sigma\,dy\,dx = \int_0^h y^2\,\sigma\,dy \int_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} dx = \int_0^h y^2\,\sigma\,dy\;(x)\Big|_{-\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})}^{\frac{b}{2}(1-\frac{y}{h})} = \int_0^h b\,(1-\frac{y}{h})y^2\,\sigma\,dy =$$

$$= b\,\sigma\int_0^h (y^2 - \frac{y^3}{h})\,dy = b\,\sigma(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4h}y^4)_0^h = \frac{b\,\sigma\,h^3}{12} \qquad ma\;\; M = \frac{b\,h\,\sigma}{2}$$

$$I = \frac{1}{6}M\,h^2$$

Problema

Assumiamo come polo di riduzione il punto Ω=(0,a/2). Si ha

$$\vec{F}^e = M\,\vec{a}_{CM} \qquad \Phi_{Ax}\vec{i} + \Phi_{Ay}\,\vec{j} + \Phi_{Bx}\vec{i} + \Phi_{By}\,\vec{j} - p\,\vec{j} = \vec{0}$$

$$\begin{cases}\Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} - p = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\Phi_{Ax} = -\Phi_{Bx} \\ p = \Phi_{Ay} + \Phi_{By} \;\; (risposta\,b)\end{cases}$$

$$\vec{M}^e = \frac{d\,\vec{L}}{dt} + \vec{v}_\Omega \wedge \vec{P} \qquad \frac{a}{2}\vec{i} \wedge (-p\,\vec{j}) + \frac{b}{2}\vec{j} \wedge (\Phi_{Bx}\vec{i} + \Phi_{By}\,\vec{j}) - \frac{b}{2}\vec{j} \wedge (\Phi_{Ax}\vec{i} + \Phi_{Ay}\,\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\left\{-\frac{a\,p}{2} - \frac{b\,\Phi_{Bx}}{2} + \frac{b\,\Phi_{Ax}}{2} = 0\right. \qquad \left\{-a\,p + b\,\Phi_{Ax} + b\,\Phi_{Ax} = 0\right.$$

$$\left\{\Phi_{Ax} = \frac{a}{2b}\,p\right. \qquad \left\{\Phi_{Bx} = -\frac{a}{2b}\,p \quad (risposta\,a)\right.$$