

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI A-K, MECCANICA, CIVILE (A-K), CIVILE (L-Z), PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, PER L'INDUSTRIA ALIMENTARE e CHIMICA

(Proff. A. Bertin, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

28/6/2005

(1)

Un disco di raggio R e massa m è appoggiato sopra un piano orizzontale liscio e ruota con velocità angolare costante ω_0 attorno all'asse verticale passante per il suo centro. La superficie del disco è attraversata da una scanalatura dritta lunga quanto il diametro. Un punto materiale di massa m_1 si trova all'istante $t = 0$ sul bordo del disco e si muove lungo la scanalatura dirigendosi verso il centro con velocità costante v_0 (relativa al riferimento solidale col disco). Un motore mantiene costante nel tempo la velocità di rotazione del disco. Determinare le espressioni delle seguenti quantità (si assuma un sistema di riferimento solidale con il piano d'appoggio del disco ed avente l'asse z coincidente con il suo asse di rotazione):

- il modulo del momento della quantità di moto del disco e il modulo del momento della quantità di moto del punto materiale come funzioni del tempo, scegliendo il centro del disco come centro di riduzione;
- il modulo del momento delle forze esterne agenti sul sistema, calcolato rispetto all'asse di rotazione;
- il lavoro compiuto sul sistema dalla risultante delle forze dall'istante $t = 0$ a quello $t = t_0$ in cui il punto materiale passa per il centro del disco.

Quesiti

- Calcolare le componenti cartesiane di uno dei due versori normali al piano individuato dai vettori $(2, 0, 0)$ e $(2, 3, 2)$.
- Discutere le principali proprietà delle forze inerziali.
- Scrivere le equazioni cartesiane del moto di un punto materiale di massa m posto in un campo di forze che ha per energia potenziale $V(x, y, z) = -\alpha z^2$, sapendo che all'istante $t = 0$ il punto si trova in $(0, 0, z_0)$ con velocità $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$. Risolvere le equazioni.
- Due masse puntiformi uguali di valore $m = 1 \text{ Kg}$ sono poste all'estremità di una asticella di massa trascurabile rotante attorno ad un asse ad essa perpendicolare e passante per un punto distante $r_1 = 3m$ e $r_2 = 4m$ dai suoi estremi. Calcolare il modulo del momento angolare totale del sistema nella ipotesi che l'asta compia un giro completo in un tempo $t = 25 \text{ s}$.

Soluzione LA1

a) $\hat{\omega} \cdot \vec{L} = I \omega$

dato che il momento della quantità di moto nei due casi è diretto lungo l'asse si ha anche

$$|\vec{L}_{disco}| = \hat{\omega} \cdot \vec{L}_{disco} = I_{disco} \omega = \frac{1}{2} m R^2 \omega_0,$$

$$|\vec{L}_{punto}| = \hat{\omega} \cdot \vec{L}_{punto} = I_{punto} \omega = m_1 (R - v_0 t)^2 \omega_0$$

b) $\vec{M}_{tot} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m R^2 \omega_0 \hat{k} + m_1 (R - v_0 t)^2 \omega_0 \hat{k} \right) = 2m_1 \omega_0 v_0 |R - v_0 t| \hat{k}$

$$\hat{\omega} \cdot \vec{M}_{tot} = \hat{k} \cdot \vec{M}_{tot} = 2m_1 \omega_0 v_0 |R - v_0 t|$$

c) $L = T_f - T_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (v_0^2 + \omega_0^2 R^2) \right) = -\frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_0^2$

Q1

$$\vec{v} = (2, 0, 0) \wedge (2, 3, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) + \vec{j}(-6) + \vec{k}(6) = (0, -6, 6)$$

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{36+36}} (0, -6, 6) = \frac{1}{6\sqrt{2}} (0, -6, 6) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)$$

Q3

3) $\vec{F} = 2\alpha z \vec{k}$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, $\vec{r}_0 = z_0 \vec{k}$ $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$, $\ddot{z} - \frac{2\alpha}{m} z = 0$

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) \equiv 0, \quad z(t) = \frac{z_0}{2} \left(e^{\sqrt{2\alpha/m} t} + e^{-\sqrt{2\alpha/m} t} \right)$$

Q4

$$|\vec{L}| = m v_1 r_1 + m v_2 r_2 = m \omega (r_1^2 + r_2^2) = 1 \frac{2\pi}{25} (9 + 16) = 2\pi K g m^2 / s$$